zugleich, unter welchen Bedingungen eine Maschine, ein Getriebe oder ein Mechanismus zwangläufig beweglich ist.

Früher hat man diese Frage in komplizierteren Fällen entweder durch die Anfertigung von Modellen, oder auf mühsamem zeichnerischen Wege zu beantworten gesucht, wobei nicht selten Irrtümer unterliefen. Es wird im folgenden dargetan, daß die Antwort recht einfach und allgemein ist, denn die Bedingung der Zwangläufigkeit besteht in einer ganzzahligen Beziehung zwischen der Zahl der Kettenglieder und der sie verbindenden Elementenpaare.

Drittes Kapitel.

Die Bedingungen der Zwangläufigkeit für die ebenen geschlossenen kinematischen Ketten.

15. Die Zwangläufigkeit der ebenen Drehpaarketten.

Wir bezeichnen mit n_2 die Anzahl aller in der Kette enthaltenen binären, mit n_3 die aller ternären, ..., mit n_i die Anzahl aller i Elemente enthaltenden Glieder, endlich mit n die Anzahl aller Glieder der Kette überhaupt. Dann ist, wie ohne weiteres ersichtlich,

$$n_2 + n_3 + \ldots + n_i + \ldots = n,$$

wofür wir kürzer setzen:

$$\sum_2 (n_i) = n. \qquad (1)$$

Bezeichnet ferner g die Anzahl aller Drehpaare in der Kette, so ist die Anzahl aller Elemente, da jedes Paar aus 2 Elementen besteht,

$$e = 2g.$$

Die Anzahl e aller Elemente ist aber auch, wie leicht ersichtlich,

$$= 2n_2 + 3n_3 + \ldots + i\,n_i + \ldots = \sum_2 (i\,n_i);$$

es besteht folglich die Beziehung

$$\sum_2 (i\,n_i) = 2g. \qquad (2)$$

Um in möglichst einfacher Weise zur Bedingungsgleichung der Zwangläufigkeit zu gelangen, wollen wir uns die Kettenglieder durch starre Ebenen parallel den Ebenen der Bahnen ersetzt denken und sie alle in einer Ebene liegend, also komplan beweglich annehmen. Das ist möglich, weil alle Gliederpunkte senkrecht zu jenen Ebenen kongruente gleichliegende Bahnen beschreiben. Ferner denken wir uns die Drehpaare durch die Schnittpunkte ihrer Achsen mit den betreffenden Ebenen ersetzt; je zwei durch ein Drehpaar verbundene

Glieder, bzw. die sie ersetzenden Ebenen haben folglich einen Punkt gemeinsam, um den sich die Ebenen gegenseitig drehen und den wir ihren Gelenkpunkt nennen wollen. Wir beziehen die Kette durch die Koordinaten ihrer Gelenkpunkte auf ein ebenes rechtwinkliges Koordinatensystem, und zwar seien $x_{hp} y_{hp}$ die Koordinaten des Gelenkpunktes G_{hp}, welcher den Ebenen E_h und E_p gemeinsam ist, ferner $x_{hq} y_{hq}$ die entsprechenden Koordinaten des Gelenkpunktes G_{hq}. Da A_{hp} und A_{hq} in der Ebene E_h liegen und diese starr ist, so besteht zwischen deren Koordinaten die Gleichung

$$(x_{hp} - x_{hq})^2 + (y_{hp} - y_{hq})^2 = l_{pq}^2, \quad \ldots \ldots \quad \text{(A)}$$

welche ausdrückt, daß sich die Entfernung $\overline{A_{hp} A_{hq}} = l_{pq}$ während der Bewegung der Ebene E_h nicht ändert. Bekanntlich sind $2i - 3$ solcher voneinander unabhängiger Gleichungen (A) notwendig und hinreichend, um auszudrücken, daß die i Gelenkpunkte in der Ebene E_h ihre gegenseitige Lage nicht ändern, also die Ebene starr ist. Da in der Kette n_i Glieder mit i Elementen vorhanden sind, so beträgt für sie die Anzahl der Gleichungen (A), welche Bedingungsgleichungen der Starrheit genannt werden, $(2i - 3) n_i$, folglich für die ganze Kette

$$\sum_2^i (2i - 3) n_i.$$

Sie sind die einzigen Gleichungen, denen die Koordinaten der Gelenkpunkte zu genügen haben. Folglich müssen zwischen den Änderungen δx, δy der Koordinaten $\sum_2^i (2i - 3) n_i$ Gleichungen der Form

$$(x_{hp} - x_{hq})(\delta x_{hp} - \delta x_{hq}) + (y_{hp} - y_{hq})(\delta y_{hp} - \delta y_{hq}) = 0 \quad . \ . \ \text{(B)}$$

bestehen, aus denen sich die δx und δy bestimmen lassen.

Ist die Kette zwangläufig beweglich, so müssen alle Gelenkpunkte gegen ein als ruhend angenommenes Kettenglied nach Gestalt und Größe ganz bestimmte Bahnen beschreiben, sobald einem der Glieder gegen das ruhende Glied eine mögliche Bewegung erteilt wird. Folglich müssen auch die Bahnelemente aller Gelenkpunkte in jeder gegenseitigen Lage der Glieder ganz bestimmte werden, und das ist der Fall, wenn die Änderungen δx, δy alle bestimmte sind. Da es nun notwendig ist und hinreicht, drei dieser auf ein Glied bezüglichen Änderungen gleich Null zu setzen, um auszudrücken, daß dieses Glied ruht, und ferner die Wahl einer der beiden Änderungen δx, δy der Koordinaten eines Gelenkpunktes, der nicht zugleich dem ruhenden Glied angehört, das Bahnelement dieses Punktes völlig bestimmt, wenn die Kette zwangläufig ist, so erkennt man, daß durch die Wahl von 4 der $2g$ Änderungen δx, δy in einer zwangläufigen Drehpaarkette alle übrigen $2g - 4$ völlig bestimmt sein müssen. Die Ermittlung dieser Änderungen geschieht aber durch die Gleichungen (B); deren Anzahl muß also $2g-4$ betragen. Soll also die Kette zwangläufig beweglich sein, so muß die Beziehung

$$\sum_2 (2i-3)n_i = 2g-4 \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(I a)}$$

bestehen. Diese läßt sich, wie folgt, umformen. Es ist

$$\sum_2 (2i-3)n_i = 2\sum_2 (in_i) - 3\sum_2 (n_i),$$

folglich unter Benutzung von (1) und (2)

$$= 4g - 3n;$$

sonach geht (Ia) über in

$$2g - 3n + 4 = 0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(I)}$$

Diese Relation ist eine solche zwischen der Anzahl aller Glieder und der sie verbindenden Drehpaare, also ganzzahlig und unabhängig von den Abmessungen der Kettenglieder und deren gegenseitigen Lagen, vorausgesetzt, daß die Kettenglieder starr, also die auf jedes Kettenglied bezüglichen Gleichungen (A) voneinander unabhängig sind. Unter der letzteren Voraussetzung ist folglich die Gleichung (I) die notwendige und hinreichende Bedingung der Zwangläufigkeit für die ebenen geschlossenen Drehpaarketten.

16. Folgerungen.

Da aus (I)

$$g = \tfrac{3}{2}n - 2$$

folgt, so erkennt man, daß die Anzahl n der Glieder einer zwangläufig geschlossenen ebenen Drehpaarkette eine gerade ist.

Ersetzt man in (I) n und g mittels der Relationen (1) und (2), so ergibt sich eine Gleichung, aus der

$$n_2 = 4 + \sum_4 (i-3)n_i$$

folgt. Damit erhält man, weil die Summe rechts nur positive Glieder enthält, den Satz:

Die Anzahl der binären Glieder einer zwangläufig geschlossenen ebenen Drehpaarkette ist unabhängig von der Anzahl der ternären Glieder und beträgt mindestens 4.

Um zu erkennen, welchen Wert i in einer zwangläufigen Kette von n Gliedern höchstens erreichen kann, bilden wir eine zwangläufige geschlossene Kette aus einem i Elemente enthaltenden Gliede mit einer möglichst kleinen Zahl von Gliedern. Wir nehmen jenes Glied 1 zum ruhenden und schließen in jedem der i Gelenkpunkte ein weiteres Glied gelenkig an (s. Fig. 19). Um die Glieder 2, 3, 4, ... i in von 1 abhängige Bewegungen zu bringen, ist die Verbindung mit 1 unmittelbar, oder nacheinander (wie in Fig. 19 dargestellt) durch je ein weiteres Glied erforderlich, derart, daß $i - 1$ Gelenkvierecke entstehen. Die Anzahl n' der Glieder dieser Kette ist $= 1 + i + i - 1 = 2i$, die Anzahl der Drehpaare $g' = i + 2(i - 2) + 2 = 3i - 2$; folglich ist

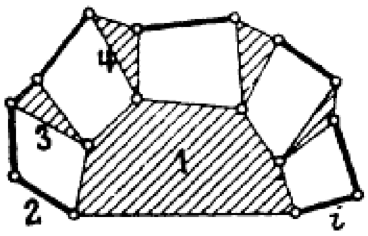

Fig. 19.

$$2g' - 3n' + 4 = 6i - 6i - 4 + 4 = 0,$$

also die Kette zwangläufig. Im allgemeinen wird die Zahl n der Glieder einer derartigen Kette größer als n' sein; setzen wir daher, falls a eine positive ganze Zahl bedeutet,

$$n = n' + a = 2i + a,$$

so folgt umgekehrt

$$i = \frac{n - a}{2}.$$

Damit wird erkannt, daß

$$\max(i) = \frac{n}{2}.$$

Daher der Satz: Die Anzahl der Elemente in einem Gliede einer n-gliedrigen zwangläufig geschlossenen ebenen kinematischen Kette beträgt höchstens $\frac{n}{2}$.

17. Die sechs- und achtgliedrigen Drehpaarketten.

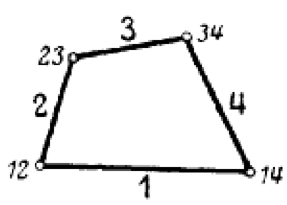

Fig. 20.

Da diese in den Anwendungen sehr häufig auftreten, so sollen sie hier einzeln aufgeführt werden.

Zunächst aber sei erwähnt, daß aus (I) für $n = 2$ $g = 1$ folgt, also die dem Drehpaar entsprechende Lösung, und ferner für $n = 4$ $g = 4$, deren entsprechende Kette das ebene Gelenkviereck (Fig. 20) ist.

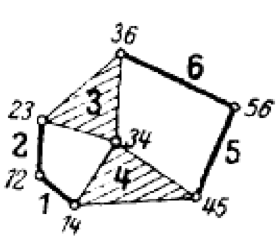

Fig. 21 a.

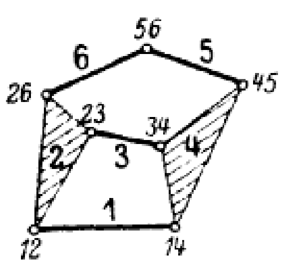

Fig. 21 b.

Falls in (I) $n = 6$ gesetzt wird, so erhält man $g = 7$ und ferner aus (1) und (2) $n_2 = 4$, $n_3 = 2$. Dieser Lösung ordnen sich nur zwei verschiedene Ketten zu, die in Fig. 21a und 21b schematisch dargestellt sind. Der Unterschied beider Ketten besteht nun darin, daß die Kette 21a (von Burmester Wattscher Mechanismus genannt) zwei Gelenkvierecke enthält, die von den Gliedern 1234 bzw. 3456 gebildet werden, dagegen die Kette 21b (in der Terminologie **Burmesters** Stephensonscher Mechanismus) nur ein Gelenkviereck 1234.

Für $n = 8$ findet sich aus (I) $g = 10$ und aus (1) und (2) ergeben sich dann folgende drei Gruppen von Lösungen, welche alle möglichen achtgliedrigen Drehpaarketten umfassen:

$$(A)\begin{cases} n_2 = 4 \\ n_3 = 4 \\ n_4 = 0 \end{cases} \qquad (B)\begin{cases} n_2 = 5 \\ n_3 = 2 \\ n_4 = 1 \end{cases} \qquad (C)\begin{cases} n_2 = 6 \\ n_3 = 0 \\ n_4 = 2. \end{cases}$$

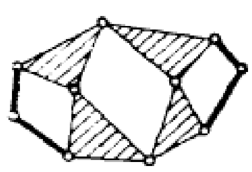

Fig. 22a.

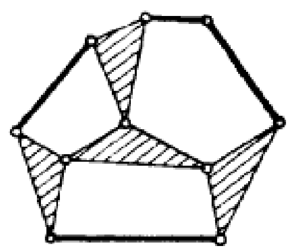

Fig. 22b.

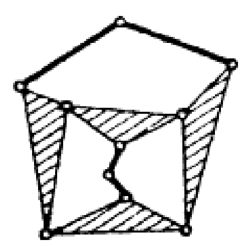

Fig. 22c.

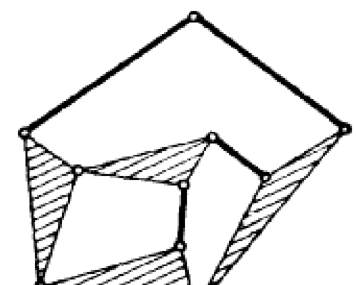

Fig. 22d.

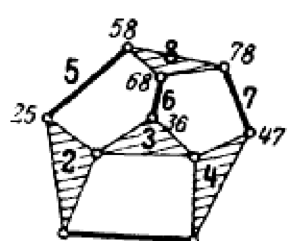

Fig. 22e.

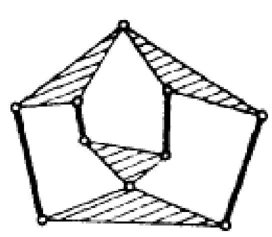

Fig. 22f.

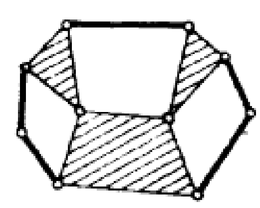

Fig. 23a.

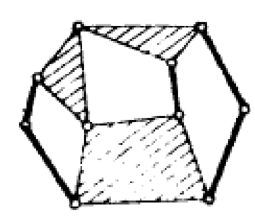

Fig. 23b.

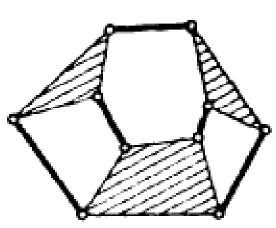

Fig. 23c.

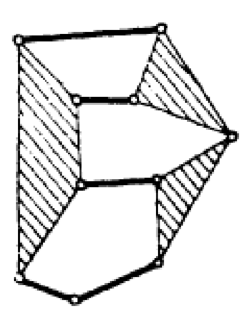

Fig. 23d.

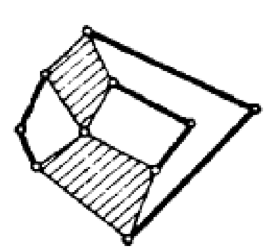

Fig. 24a.

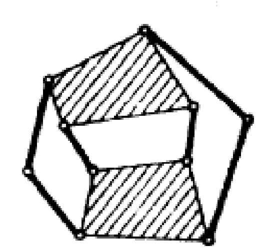

Fig. 24b.

Der Gruppe (A) entsprechen die in den Fig. 22a, b, c, d, e, f dargestellten sechs Ketten, der Gruppe (B) die in den Fig. 23a, b, c, d dargestellten vier Ketten, und der Gruppe (C) die beiden Ketten Fig. 24a und b. Der Unterschied zwischen den Ketten einer jeden Gruppe beruht wie bei den sechsgliedrigen Ketten auf der Anordnung der Glieder; es treten in den Ketten solche mit drei und zwei Gelenkvierecken auf, aber auch solche mit nur einem oder ohne Gelenkviereck[1]).

[1]) Einen Weg, auf dem man zu den verschiedenen Anordnungen der Glieder gelangen kann, habe ich in der Zeitschrift Civilingenieur 1880, S. 168 mitgeteilt.