Glieder 1 und 2, sowie 3 und 4, die gleiche Länge haben. Bewegt sich nun das Glied 2 gegen 1, bis es mit ihm zusammenfällt, dann fallen auch die Drehachsen der Drehpaare 14 und 23 zusammen, und die Glieder 3 und 4 ebenfalls. Diese Lage wird zur Wechsellage, sobald von dieser aus die Glieder 3 und 4 in relativer Ruhe gegeneinander bleiben, sich also wie ein einziges starres Glied weiter bewegen. Dasselbe gilt dann auch von den Gliedern 1 und 2. Es geht sonach das Gelenkviereck durch die Wechsellage in eine bewegliche Verbindung zweier Glieder, nämlich in ein Drehpaar über, dessen Drehachse die gemeinschaftliche Achse von 14 und 23 ist.

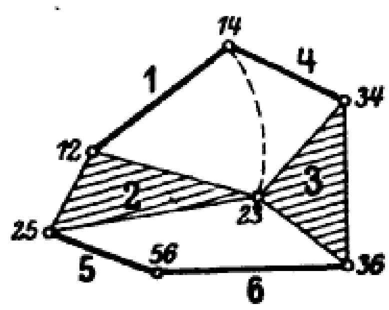

Fig. 51.

Verbindet man mit den Gliedern 2 und 3 dieses Getriebes zwei weitere Glieder 5 und 6 durch Drehpaare, so erhält man eine sechsgliedrige zwangläufige Drehpaarkette (Fig. 51) mit einer Wechsellage, durch die sie in das Gelenkviereck 2365 übergehen kann. In solcher Weise lassen sich Umschlußpaarketten mit Wechsellagen sehr vielfacher Art finden. Da sie jedoch bisher nicht angewendet worden sind, so soll auf sie nicht weiter eingegangen werden.

Viertes Kapitel.

Die übergeschlossenen ebenen Umschlußpaarketten.

24. Übergeschlossene Gelenkketten.

Es gibt kinematische Ketten, die zwangläufig beweglich sind, und doch der Gleichung (I) nicht genügen, wie z. B. die sog. Dreiparallelkurbelkette, die in Fig. 52 dargestellt ist. Diese Kette hat $n = 5$ bewegliche Glieder und $g = 6$ Drehpaare. Da hier

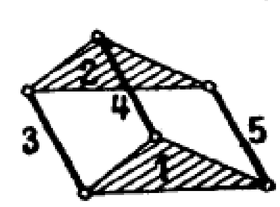

Fig. 52.

$$\tfrac{3}{2}n - 2 = \tfrac{11}{2},$$

so folgt

$$g > \tfrac{3}{2}n - 2;$$

die Kette genügt also der Beziehung (I) nicht. Trotzdem ist sie zwangläufig beweglich, wie man sich auf geometrischem Wege leicht überzeugt, denn jeder beliebigen Lage der Kurbel 3 gegen das Glied 1 ordnen sich ganz bestimmte Lagen der Glieder 2, 4 und 5 zu. Der Grund für diese scheinbare Ausnahme liegt in dem Umstande, daß die Kette nur infolge der besonderen Abmessungen der Kettenglieder beweglich wird. Bei beliebigen Abmessungen ist sie dagegen ein in sich völlig unbewegliches Gebilde, nämlich ein sog. ebenes einfaches Fachwerk, wie es Fig. 53 darstellt. Die Dreiparallelkurbelkette ist sonach ein Ausnahmefall, aber nicht der einer zwangläufig beweglichen kinematischen Kette, sondern der eines Fachwerkes, das im allgemeinen ein starres Gebilde darstellt. Denn das Fachwerk Fig. 53 geht in die Dreiparallelkurbelkette Fig. 52 dadurch über, daß die binären Glieder 3, 4 und 5 gleich lang und die beiden ternären Glieder 1 und 2 als kongruente Dreiecke gewählt werden.

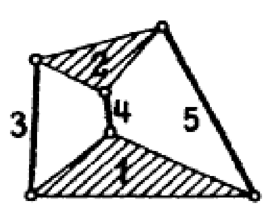

Fig. 53.

Derartige Ketten heißen übergeschlossen, weil sie mehr Glieder und Elementenpaare enthalten, als zur Erzeugung der Zwangläufigkeit notwendig sind. Denn man erkennt im obigen Beispiel unmittelbar, daß die Relativbewegung der Glieder 1 und 2 dieselbe bleibt, wenn man eines der drei Glieder 3, 4 oder 5 beseitigt. Geschieht dies aber, so erhält man ein Gelenkviereck, insbesondere ein Gelenkparallelogramm, und dieses ist zwangläufig beweglich.

Umgekehrt ersieht man hieraus, daß man aus im allgemeinen zwangläufig beweglichen kinematischen Ketten übergeschlossene ableiten kann, indem man an zwei der Glieder ein weiteres mittels je eines Elementenpaares beweglich anschließt. Im allgemeinen geht hierdurch die Kette in eine unbewegliche Verbindung der Glieder über, die nur in ganz besonderen Fällen, und zwar bei entsprechend gewählten voneinander abhängigen Abmessungen der Kettenglieder beweglich wird.

Eine übergeschlossene Drehpaarkette, die aus einer zwangläufigen Drehpaarkette durch Zufügung eines binären Gliedes mittels zweier Drehpaare entstanden ist, würde

$$n_0 = n + 1$$

Glieder und

$$g_0 = g + 2$$

Drehpaare enthalten, falls die entsprechenden Zahlen für die ursprüngliche Kette n und g waren. Da letztere zwangläufig vorausgesetzt wurde, für sie also die Beziehung (I) besteht, d. i.

$$2g - 3n + 4 = 0,$$

so folgt nach Einsetzung der Werte $n = n_0 - 1$, $g = g_0 - 2$

$$g_0 = \tfrac{3}{2}n - \tfrac{3}{2};$$

für die übergeschlossene Kette gilt demnach die Beziehung

$$g_0 > \tfrac{3}{2}n - 2.$$

Die gleiche Beziehung gilt selbstverständlich auch für alle die übergeschlossenen Drehpaarketten, die aus einer zwangläufigen Drehpaarkette dadurch entstanden, daß mehrere Glieder beweglich angeschlossen wurden.

Da die übergeschlossenen Drehpaarketten mehr Glieder und Elementenpaare enthalten, als zur Erzielung der zwangläufigen Bewegung nötig sind und außerdem ihre Beweglichkeit an z. T. komplizierte Bedingungsgleichungen für die Abmessungen der Kettenglieder gebunden ist, so werden sie nur ganz selten unmittelbar verwendet. Es soll deshalb auf sie im allgemeinen hier nicht näher eingegangen werden. Da sie aber zur Synthese von Mechanismen und zur Erzielnng bestimmter Bewegungen manchmal mit Vorteil benutzt werden können, so mögen die wichtigsten und bekanntesten derselben hier kurz besprochen werden.

Übergeschlossene Drehpaarketten kann man aus ebenen Fachwerken dadurch ableiten, daß man die Bedingungsgleichungen für die Abmessungen der Kettenglieder aufsucht, unter denen das Fachwerk in ein Gebilde von endlicher Beweglichkeit übergeht. Diese Bedingungsgleichungen ergeben sich daraus, daß die Determinante der Bedingungsgleichungen (A) der Starrheit der Fachwerksglieder (s. S. 14) identisch verschwinden muß.

Einfacher und zwar auf geometrischem Wege wird man zu Gruppen von übergeschlossenen Drehpaarketten geführt durch gewisse kinematisch-geometrische Eigenschaften des gelenkigen Parallelogrammes und Antiparallelogrammes.

Bei dem Gelenkparallelogramm beschreiben die sämtlichen Punkte einer Seite kongruente gleichliegende Kreise um die entsprechenden Punkte der Gegenseite. Daher lassen sich je zwei derartige Punkte durch einen starren Stab (Kurbel) von gleicher Länge und Richtung verbinden, wie in dem Dreiparallelkurbelgetriebe (Fig. 52). Auf dem letzteren beruht u. a. die Robervalsche Wage (s. Fig. 54), sowie in mehrfacher Wiederholung das Buchanansche Ruderrad (s. Fig. 55).

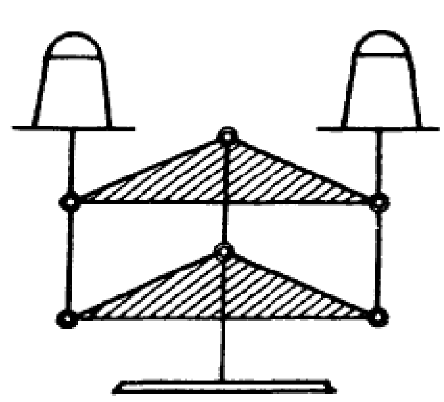

Fig. 54.

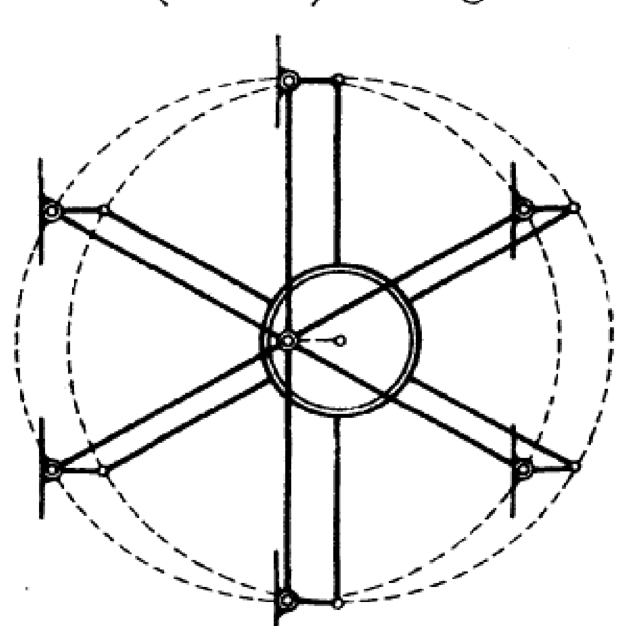

Fig. 55.

Eine weitere geometrische Eigenschaft des Gelenkparallelogrammes besteht darin, daß die 4 Punkte M, N, P, Q auf den 4 Gliedern des Gelenkparallelogrammes A, B, C, D (s. Fig. 56), die in einer Geraden liegen, diese letztere Eigenschaft in allen gegenseitigen Lagen der 4 Glieder bewahren. Hält man nun einen der

4 Punkte, z. B. M, fest und bewegt N auf irgendeiner Kurve (n), so bescnreiben P und Q ähnliche und ähnlich liegende Kurven. Auf dieser Eigenschaft beruht der bekannte Storchschnabel (Pantograph) zur ähnlichen Vergrößerung oder Verkleinerung von Zeichnungen. Ist die Kurve (n) ein Kreis, so sind folglich die Bahnen der Punkte P und Q auch Kreise, deren Mittelpunkte M_p und M_q mit M_n auf einer Geraden durch M liegen. Letztere Punkte lassen sich aber mit den Punkten N, P und Q paarweise durch starre Stäbe (Kurbeln) verbinden, ohne daß hierdurch eine Änderung der zwangläufigen Beweglichkeit der Kette herbeigeführt würde, und so entsteht eine übergeschlossene Gelenkkette von $n = 8$ Gliedern und $g = 11$ Drehpaaren, für die

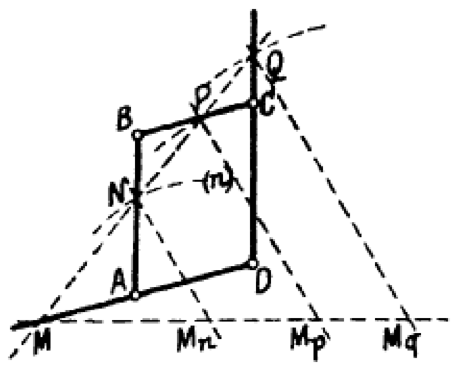

Fig. 56.

$$g > \tfrac{3}{2}n - 2$$

ist. Diese Kette ist also im allgemeinen, d. h. bei beliebigen Abmessungen der Kettenglieder unbeweglich; sie geht in eine zwangläufig bewegliche Kette nur über, falls $ABCD$ ein Parallelogramm ist und die 4 Punkte M, N, P, Q auf einer Geraden liegen.

Eine andere übergeschlossene Kette erhält man aus der Eigenschaft des Gelenkparallelogrammes, daß die Punkte P und Q zweier zusammenstoßender Seiten BC und CD (Fig. 57) des Parallelogramms ähnliche Kurven beschreiben, falls $\triangle PBC \sim \triangle CDQ$ und A in Ruhe bleibt. Wählt man nun als Bahn (q) des Punktes Q einen Kreis, so beschreibt auch P einen solchen und die Kreismittelpunkte M_p und M_q bilden mit A ein starres Dreieck, das ruht. Verbindet man nun P mit M_p und Q mit M_q durch starre Stäbe (Kurbeln) gelenkig, so entsteht eine übergeschlossene Drehpaarkette,

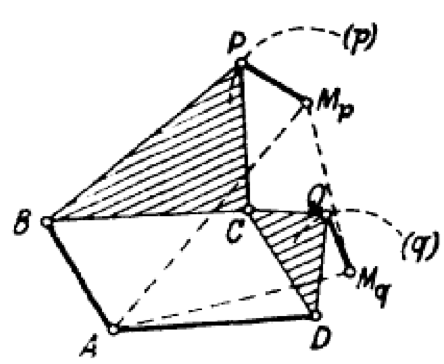

Fig. 57.

die von Sylvester herrührt. Die Anzahl ihrer Glieder ist $n = 7$, die der Drehpaare $g = 9$, da das Gelenk in A ein dreifaches, also wie 2 Drehpaare zu zählen ist; folglich hat man

$$g > \tfrac{3}{2}n - 2.$$

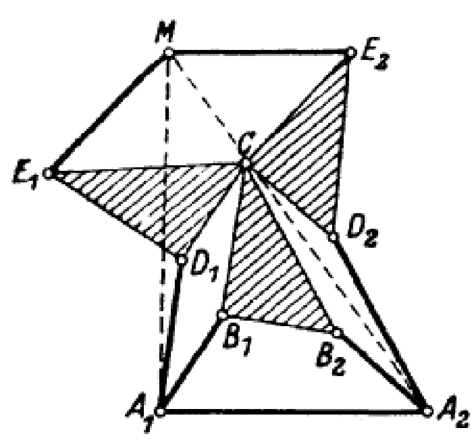

Fig. 58.

Auf einer Verbindung zweier derartiger Ketten beruht die übergeschlossene Gelenkkette, die den Satz von Roberts über die dreifache Erzeugung einer sog. Koppelkurve verwirklicht. Es sei (Fig. 58) $A_1 B_1 B_2 A_2$ ein beliebiges Gelenk-