genügt, und zwar wenn das eine Element von dem anderen vollständig abhängig ist. Worin diese Abhängigkeit besteht, soll im Kapitel 5 auseinandergesetzt werden; hier mag die Bemerkung genügen, daß derartige Fälle wohl nur ganz selten vorkommen, weil an die Ketten gewöhnlich nur die Anforderung gestellt wird, daß sie bei beliebig wählbaren Abmessungen und willkürlicher Formengebung zwangläufig sind. Dieser Forderung entsprechen die übergeschlossenen Ketten nicht.

Fünftes Kapitel.

Die komplane Bewegung einer starren Ebene.

27. Die Elementarbewegung.

Die Bewegung einer starren Ebene heißt komplan, wenn alle ihre Lagen sich in einer anderen Ebene befinden. Es ist leicht ersichtlich, daß die Lage einer starren Ebene E gegen eine andere Ebene E_0, die der Anschaulichkeit wegen als ruhend vorausgesetzt werden mag, vollständig und eindeutig bestimmt ist durch die Lagen irgend zweier ihrer Punkte A und B (Fig. 66). Denn jeder beliebige weitere Punkt C wird dann in seiner Lage vollständig und eindeutig bestimmt durch das Dreieck ABC, dessen drei Seiten unveränderlich sind. Falls A' und B' die neuen Lagen von A und B bezeichnen, so erhält man die neue Lage C' des Punktes C, indem man $\triangle A'B'C' \cong \triangle ABC$ konstruiert. Da das für alle Punkte von E gilt, so bestimmt folglich die Lage von A und B die Lage aller Punkte der Ebene E vollständig und eindeutig.

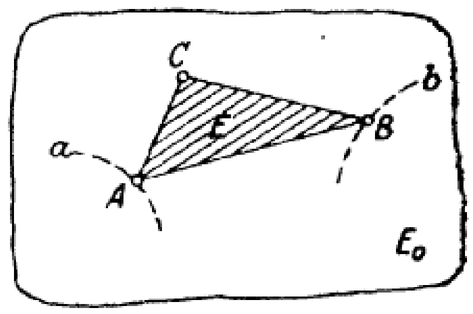

Fig. 66.

Als wichtige Folgerung ergibt sich, daß die Bahnen aller Punkte der Ebene E vollständig und eindeutig bestimmt sind durch die Bahnen irgend zweier ihrer Punkte. In Fig. 66 seien a und b die (ganz willkürlich wählbaren) Bahnen der Punkte A und B.

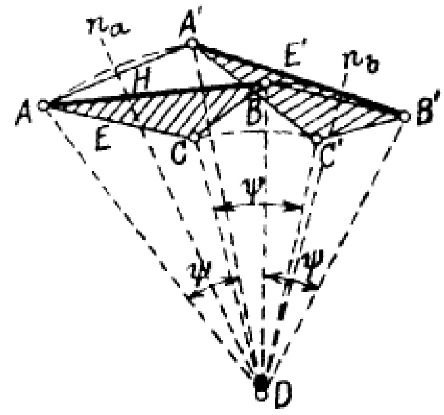

Fig. 67.

Satz: Eine Ebene läßt sich in jede beliebige komplane Lage bringen durch Drehung um einen eindeutig bestimmten Punkt derselben.

Beweis: Es seien E und E' zwei beliebige Lagen der Ebene (s. Fig. 67), bestimmt durch die Lagen A und B, bzw. A' und B' zweier ihrer Punkte. Verbindet man A mit A', halbiert diese Strecke und errichtet im Halbierungspunkte H eine Senkrechte n_a zu $\overline{AA'}$, so bewirkt die Drehung der E um jeden Punkt auf n_a, daß A einen Kreisbogen beschreibt, der durch A' geht. Das gleiche gilt von B. Wählt man daher als Drehpunkt der Ebene den Schnittpunkt D der beiden Mittelsenkrechten n_a und n_b, so führt die Drehung der Ebene um ihn sowohl A nach A' als auch B nach B'. Nach dem Vorhergehenden wird sonach die ganze Ebene E durch Drehung um D in die neue Lage E' übergeführt.

Als Folgerung hieraus ergibt sich, daß bei dieser Drehung jeder beliebige Punkt C einen Kreisbogen $\widehat{CC'}$ beschreibt, dessen Zentriwinkel CDC' derselbe ist, wie der der Punkte A und B. Dieser Winkel

$$\angle CDC' = \angle ADA' = \angle BDB' = \psi$$

heißt der Drehwinkel. Bezeichnet $\overline{CD} = r$ den Abstand des Punktes C vom Drehpunkt D, so ist die Länge des Kreisbogens

$$\widehat{CC'} = s = r \cdot \psi.$$

Sind die Strecken $\overline{AA'}$ und $\overline{BB'}$ unendlich klein, so ist auch die Lagenänderung der Ebene eine unendlich kleine, eine sogenannte Elementarbewegung. Aus dem Vorhergehenden folgt ohne weiteres, daß jede beliebige Elementarbewegung einer Ebene eine Drehung um einen eindeutig bestimmten Punkt ist; letzterer wird augenblicklicher Drehpunkt, Drehpol oder Momentanzentrum genannt. Beachtet man, daß bei einer Elementarbewegung der Ebene die Strecken $\overline{AA'}$ und $\overline{BB'}$ mit den Elementen der Bahnen a bzw. b der Punkte A und B zusammenfallen, so gehen die Mittelsenkrechten n_a und n_b hier über in Bahnnormalen der Kurven a und b in den Punkten A und B. In dem Schnittpunkt M der letzteren (s. Fig. 68) liegt sonach der augenblickliche Drehpol und ist als solcher eindeutig bestimmt. Das Bahnelement $\widehat{CC'}$ eines beliebigen Punktes C ist offenbar das Element der Bahn c, die C beschreibt, und da die Mittelsenkrechte auch hier in die Bahnnormale n_c übergeht, so finden wir als wichtige Folgerung: Die Verbindungsstrahlen der Punkte der Ebene mit dem Drehpol sind die augenblicklichen Normalen der Bahnen der Punkte. Die Bahntangenten stehen senkrecht zu ihnen und enthalten die einzelnen Bahnelemente. Der Drehwinkel ψ geht bei einer Elementarbewegung

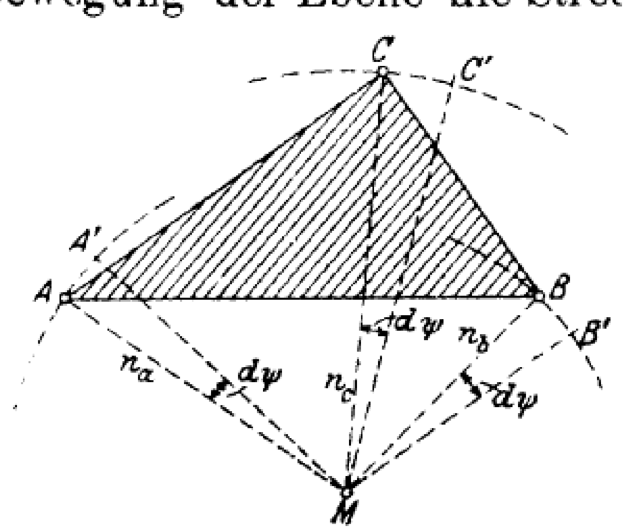

Fig. 68.

über in den ∞ kleinen Winkel $d\psi$ und das Bahnelement des Punktes C wird

$$\overline{CC'} = ds = r \cdot d\psi,$$

falls, wie vorher, $\overline{MC} = r$ gesetzt wird.

28. Die Rollkurven.

Wird die Bewegung der Ebene E gegen die ruhende Ebene E_0 bestimmt durch die Bahnen a und b der Punkte A und B, so ergibt sich im Schnittpunkt M der Bahnnormalen n_a und n_b das Momentanzentrum für die betreffende Lage von E. Für jede andere Lage E', E'' usf. erhält man im allgemeinen einen anderen Punkt M', M'', ... von E_0 als Drehpol (Fig. 69), und letztere Punkte liegen auf einer Kurve m, welche ruhende Polkurve oder auch Polbahn genannt wird. Mit dem Punkte M von E_0 fällt immer ein entsprechender Punkt $\mathbf{M}$ von E zusammen und die Punkte $\mathbf{M}$ in E bilden ebenfalls eine Kurve, welche in Fig. 69 mit μ bezeichnet ist, bewegliche Polkurve genannt wird.

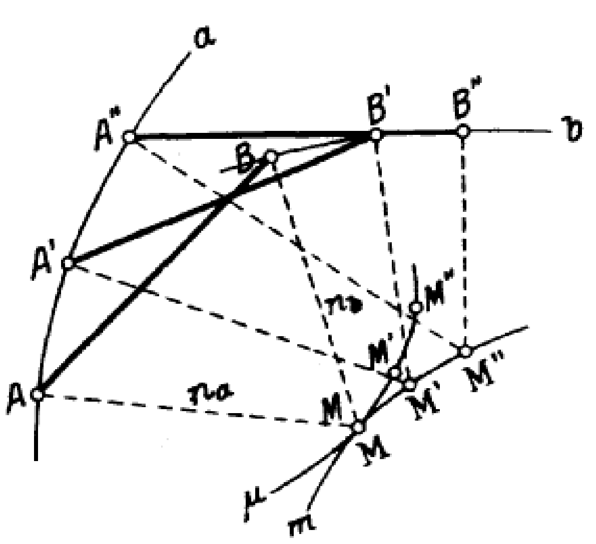

Fig. 69.

Es läßt sich unschwer zeigen, daß die beiden Kurven m und μ sich in M bzw. $\mathbf{M}$ berühren und aufeinander rollen, d. h. daß bei der Bewegung von E in die beliebige Lage E' sich der Berührungspunkt auf beiden Kurven um die gleiche Länge vorwärts bewegt, also

$$\widehat{\mathbf{MM'}} = \widehat{MM'}$$

ist. Es seien E, E', E'' drei endlich verschiedene Lagen von E (Fig. 70) und D, D' die Drehpunkte, um welche die Ebene E gedreht werden muß, damit sie aus der Lage E in die Lage E', bzw. aus E' nach E'' kommt. Ist die Ebene in der Lage E, so werde der mit D zusammenfallende Punkt von E mit Δ bezeichnet, während der Punkt von E, der nach erfolgter Drehung von E nach E' mit D' zusammenfällt, mit Δ' bezeichnet werde. Da Δ und Δ' Punkte der starren Ebene E sind und bei der Drehung Δ in Ruhe bleibt, so muß Δ' einen Kreisbogen $\widehat{\Delta' D'}$ beschreiben, der Δ' nach

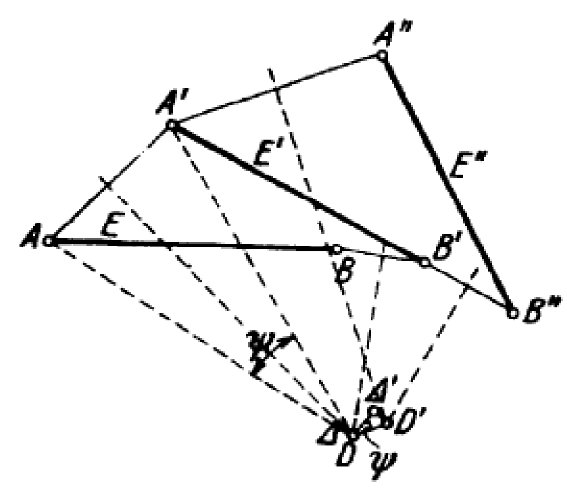

Fig. 70.

D' führt und dessen Zentriwinkel gleich dem Drehwinkel der Ebene ist. Sonach muß $\overline{\varDelta\varDelta'} = \overline{DD'}$ sein.

Sind die drei Lagen E, E' und E'' unendlich benachbart, so gehen die Punkte D und D' in M und M', $\varDelta$ und $\varDelta'$ in M bzw. M' über, der Drehwinkel wird unendlich klein, bzw. hat Null zur Grenze, und es ist dann $\overline{MM'}$ ein Element der Kurve m, $\overline{\mathsf{MM}'}$ ein solches von μ. Beide Kurvenelemente haben einen Punkt (M, M) gemeinsam, sind in der Richtung nur unendlich wenig verschieden und gleich groß; es ist also $\overline{MM'} = \overline{\mathsf{MM}'}$, d. h. auf beiden Kurven m und μ wandert der Berührungspunkt bei einer unendlich kleinen Bewegung der Ebene um das gleiche Stück vorwärts. Da man nun die endliche Bewegung als eine Aufeinanderfolge unendlich vieler Elementarbewegungen ansehen kann, so berühren sich die beiden Polkurven in jeder Lage der Ebene E gegen E_0, und es wandert der Berührungspunkt auf beiden Kurven um die gleiche Länge weiter. Letzteren Bewegungsvorgang nennt man bekanntlich das Wälzen oder Rollen (auch reines Rollen) der Kurven aufeinander, weshalb die beiden Polkurven auch die Rollkurven (Rouletten) der Bewegung genannt werden. Da die Polkurven durch die Bahnen a und b der Punkte A und B vollständig und eindeutig bestimmt sind und die Bahnen a und b willkürlich gewählt werden können, so gibt es im allgemeinen stets ein und nur ein derartiges Rollkurvenpaar m und μ. Der Berührungspunkt beider Kurven ändert sowohl auf m als auf μ seine Lage; er ist also weder ein Punkt von E_0 noch von E. Dieser Berührungspunkt, der mit P bezeichnet und künftig kurz Pol der Bewegung der Ebene E genannt werde, fällt momentan stets mit M und M zusammen.

Die Bewegung, welche E gegen E_0 vollzieht und die durch die beiden Punktbahnen a und b bestimmt wird, läßt sich hiernach auch erzeugen, wenn man die in E liegende Kurve μ auf der in E_0 liegenden Kurve m zu rollen zwingt. Da die Kurven m und μ an keine Beschränkung gebunden sind, so lassen sich alle möglichen komplanen Bewegungen starrer Ebenen durch das Rollen einer Kurve auf einer anderen Kurve erzeugen.

Hält man die Ebene E mit μ in Ruhe und läßt m auf μ rollen, so erhält man die sogenannte umgekehrte Bewegung, d. i. die von E_0 gegen E. Diese ist im allgemeinen ganz verschieden von der ursprünglichen, wie man sofort ersieht, wenn man z. B. μ als Kreis, m als Gerade wählt.

Ist die Bewegung von E durch zwei Punktbahnen bestimmt, so kann man nicht nur m als geometrischen Ort der Schnittpunkte der Bahnnormalen zeichnerisch finden, sondern auch μ auf die