

hält, wenn man auf den Strahlen $P_2'C_2'$ den Vektor $C_2'\overline{V_2}'$ von C_2' aus abträgt. Diese Kurve k_4 ist bekanntlich eine Konchoide, die sich leicht zeichnen läßt. Die Schnittpunkte beider Kurven k_2 und k_4 geben die Lösung der Aufgabe, denn der Strahl von P_2' nach einem dieser Schnittpunkte trifft n_2 in dem gesuchten Punkte C_2 . Da einer der Schnittpunkte im allgemeinen schon genügen wird, so reicht es hin, die in Frage kommenden Teile beider Kurven in der Nähe des Schnittpunktes durch etwa drei bis vier Punkte zu bestimmen.

In ähnlicher Weise wie die Forderung bestimmter Geschwindigkeiten kann auch die bestimmter Beschleunigungen gestellt werden, die sich an die Lagen von Punkten knüpft. Die entsprechenden Lösungen ergeben sich aus dem Beschleunigungszustand der Ketten, der im folgenden Kapitel behandelt werden soll. Doch lassen sich mit Hilfe der Geschwindigkeitspläne, wie sie in Nr. 31 und 32 entwickelt wurden, ebenfalls Schlüsse auf die Beschleunigung ziehen, die unter Umständen mit Vorteil für die Ermittlung der Abmessungen von Kettengliedern verwendet werden können.

Zehntes Kapitel.

Der Beschleunigungszustand der kinematischen Ketten.

47. Die Krümmung der Bahnkurven.

Der Beschleunigungszustand einer bewegten Ebene steht im engsten Zusammenhange mit den Krümmungen der Bahnkurven, weshalb zuerst auf diese eingegangen werden soll.

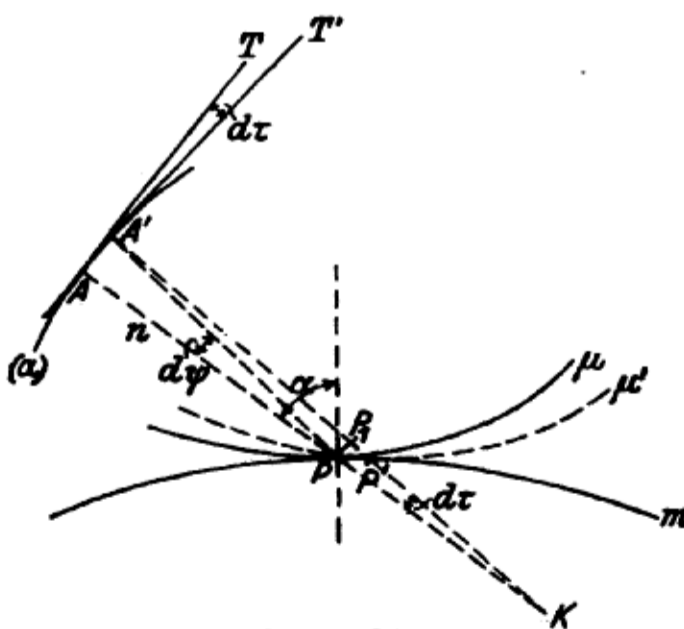


Fig. 139.

Die Bewegung der Ebene E gegen die ruhende Ebene E_0 sei durch die ruhende (m) und die bewegte (μ) Rollkurve gegeben (s. Fig. 139). Bei dieser Bewegung beschreibe der beliebige Punkt A von E die Bahn a . Während einer unendlich kleinen Drehung von E um den Pol P mit dem Drehungswinkel $d\psi$ rolle der Pol auf m von P nach P' , während A nach A' gelangt. Bekanntlich

sind dann AP und $A'P'$ die beiden unendlich benachbarten Bahn-

normalen der Bahn a , die sich im Krümmungsmittelpunkt K der Bahn schneiden. Errichten wir in P die Senkrechte PP_1 zu AP , so ist

$$\triangle KPP_1 \sim \triangle KAA'$$

und folglich

$$\overline{KP} : \overline{KA} = \overline{PP_1} : \overline{AA'}.$$

Setzen wir zur Abkürzung $\overline{PA} = \varrho$, $\overline{PK} = r$ und $\overline{PP'} = d\sigma$, so ist

$$\overline{PP_1} = \overline{PP'} \cdot \cos \alpha = d\sigma \cdot \cos \alpha,$$

falls α den spitzen Winkel zwischen \overline{PA} und der Polkurvennormalen n bezeichnet. Beachten wir weiter, daß

$$\overline{AA'} = \varrho \cdot d\psi,$$

so folgt aus vorstehender Proportion

$$r : r + \varrho = d\sigma \cdot \cos \alpha : \varrho d\psi$$

oder

$$\cos \alpha \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{\varrho} \right) = \frac{d\psi}{d\sigma}.$$

Liegt der Schnittpunkt K der beiden benachbarten Bahnnormalen nicht, wie in Fig. 139, auf verschiedenen Seiten von P , sondern auf derselben Seite wie A , wird also $\overline{AK} = \varrho - r$, so nimmt die vorstehende Gleichung die Form

$$\cos \alpha \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\varrho} \right) = \frac{d\psi}{d\sigma}$$

an. Beide Formen lassen sich in der gemeinsamen Gestalt

$$\cos \alpha \left(\frac{1}{r} \pm \frac{1}{\varrho} \right) = \frac{d\psi}{d\sigma}$$

vereinigen.

Das Verhältnis $\frac{d\psi}{d\sigma}$ hängt nicht von der Lage des Punktes A ab, denn $d\sigma$ ist das Bahnelement von m , bzw. μ , das bei dem Rollen von μ auf m abgewälzt wird. Es kann sonach hinsichtlich des geometrischen Zusammenhanges zwischen A und K

$$\frac{d\psi}{d\sigma} = \text{Const.}$$

gesetzt werden. Da

$$\frac{\cos \alpha}{\varrho} = \frac{1}{\delta}$$

die Gleichung eines Kreises durch A vom Durchmesser δ darstellt, der die Polkurven in P berührt (s. Fig. 140), ebenso

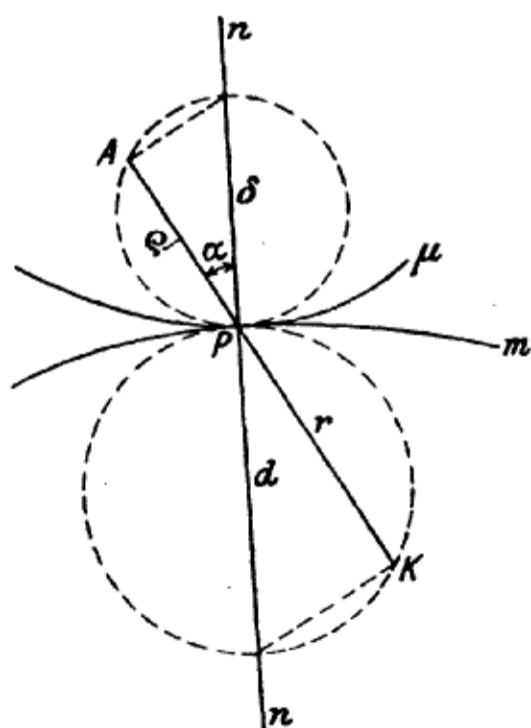


Fig. 140.

$$\frac{\cos \alpha}{r} = \frac{1}{d}$$

die Gleichung eines solchen Kreises durch K vom Durchmesser d , so besteht die Beziehung

$$\frac{1}{d} \pm \frac{1}{\rho} = \text{Const.},$$

Aus ihr geht hervor, daß jedem Punkt auf dem einen Kreis ein solcher auf dem anderen Kreis zugeordnet ist, also die beiden Kreise, bzw. ihre Durchmesser es ebenfalls sind. Man nennt deshalb die beiden Kreise einander konjugiert.

Beschreibt A augenblicklich einen Wendepunkt seiner Bahn, so wird $r = \infty$ und somit auch $d = \infty$. Die vorstehende Beziehung geht dann über in

$$\frac{1}{\delta_\infty} = \text{Const.},$$

oder, wenn wir $\delta_\infty = w$ setzen, in

$$\frac{1}{w} = \text{Const.}$$

Hieraus geht hervor, daß alle Punkte der Ebene, die augenblicklich Wendepunkte ihrer Bahnen beschreiben, auf einem Kreise liegen, der die Polkurven im Pol P berührt und den Durchmesser w hat. Man nennt ihn den Wendekreis, während die frühere Beziehung zwischen r und ρ , d. i. die Gleichung

$$\left(\frac{1}{r} \pm \frac{1}{\rho}\right) \cos \alpha = \frac{1}{w} \dots \dots \dots (1)$$

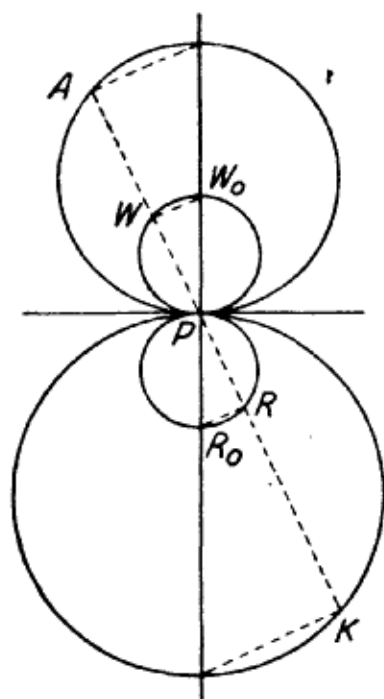


Fig. 141.

die Eulersche Gleichung genannt wird.

Der Strahl (s. Fig. 141) AP schneidet den Wendekreis in einem Punkte W , dem sogenannten Wendepunkte auf diesem Polstrahl, dessen Bahn hier eine Wendestelle hat, d. h. deren zugeordneter Krümmungsmittelpunkt im Unendlichen liegt. Es ist das der Punkt, dessen Bahnnormale $W'P'$ in der unendlich benachbarten Lage parallel zu WP wird. Hieraus folgt weiter für die Punkte der Ebene E auf dem Strahl AP , die innerhalb der Strecke PW , also innerhalb des Wendekreises liegen, daß die zugeordneten Krümmungsmittelpunkte K auf derselben

Seite des Strahles AP liegen. Oder anders ausgesprochen: Die Bahnen der Punkte der Ebene außerhalb des Wendekreises sind konkav, die innerhalb konvex gekrümmt gegen den Pol.

Die Polkurvennormale n schneidet den Wendekreis außer im

Pol noch in einem weiteren Punkte W_0 , der Wendepol genannt wird (s. Fig. 141). Dieser Punkt hat das Besondere, daß sein Bahnelement gleich und parallel dem Element $d\sigma$ der Polkurve m , also dem Bahnelement PP' des Poles P ist, weil die benachbarte Polkurvennormale $W_0'P' \parallel W_0P$ wird. Da nun

$$\overline{W_0W_0'} = \overline{PW_0} \cdot d\psi = w \cdot d\psi = d\sigma,$$

so erhält man für die Geschwindigkeit v_w des Wendepoles

$$v_w = \frac{d\sigma}{dt} = w \cdot \frac{d\psi}{dt} = w \cdot \omega,$$

falls $\omega = \frac{d\psi}{dt}$ die Winkelgeschwindigkeit der augenblicklichen Drehung der Ebene um den Pol bezeichnet. Andererseits ist $\frac{d\sigma}{dt}$ die Geschwindigkeit, mit der der Pol sich bewegt, die sogenannte Wechselgeschwindigkeit des Poles; sie findet sich sonach gleich und gleichgerichtet der Geschwindigkeit des Wendepoles.

Der Punkt der Ebene E , der augenblicklich mit P zusammenfällt, ist dadurch ausgezeichnet, daß in ihm auch der Krümmungsmittelpunkt seiner Bahn liegt, also der Krümmungsradius gleich Null ist. Das bedeutet, daß die Bahn dieses Punktes an dieser Stelle eine Spitze, auch Rückkehrpunkt genannt, besitzt. Es ist folglich die ruhende Polkurve m der geometrische Ort aller Rückkehrpunkte der Bahnen.

Für die unendlich fernen Punkte der Ebene E , für die also $\overline{PA} = \rho = \infty$, ergibt sich aus (1)

$$\frac{\cos \alpha}{r} = \frac{1}{w}$$

oder

$$r = w \cdot \cos \alpha.$$

Damit wird erkannt, daß der geometrische Ort der Krümmungsmittelpunkte der Bahnen, welche die unendlich fernen Punkte der Ebene E beschreiben, ein Kreis vom Durchmesser w des Wendekreises ist, der aber zu letzterem symmetrisch liegt (s. Fig. 141). Er deckt sich mit dem Wendekreis der umgekehrten Bewegung und wird Rückkehrkreis genannt, während der zu W_0 symmetrische Punkt R_0 der Rückkehrpol heißt.

Zwecks Ableitung einer einfachen Konstruktion der Krümmungsmittel-, bzw. Wendepunkte auf den Polstrahlen formen wir (1) in folgender Weise um. Wir führen den Krümmungshalbmesser $\overline{AK} = k$ der Bahn a des Punktes A ein, setzen demnach $r \pm \rho = k$, wodurch (1) in

$$\frac{k}{\rho \cdot r} = \frac{1}{w \cdot \cos \alpha} = \frac{1}{\overline{PW}}$$

übergeht. Beachtet man, daß $\overline{AW} = \pm(\overline{PA} - \overline{PW})$, so folgt mit $r = k \mp \rho$ hieraus

$$\overline{AW} = \frac{\rho^2}{k} \dots \dots \dots (2)$$

Diese Beziehung ermöglicht folgende einfache Konstruktion von K , wenn A , W und P gegeben sind: Man verbinde einen beliebig gewählten Punkt B außerhalb des Polstrahles (s. Fig. 142a und b)

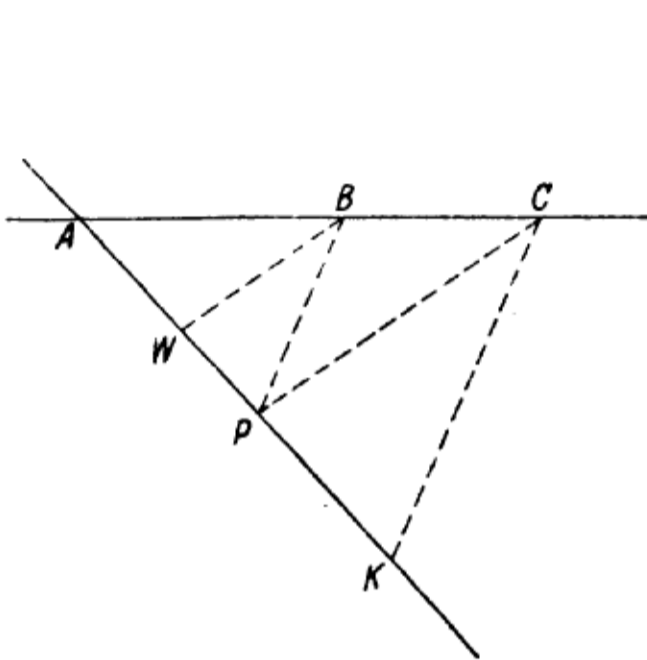


Fig. 142a.

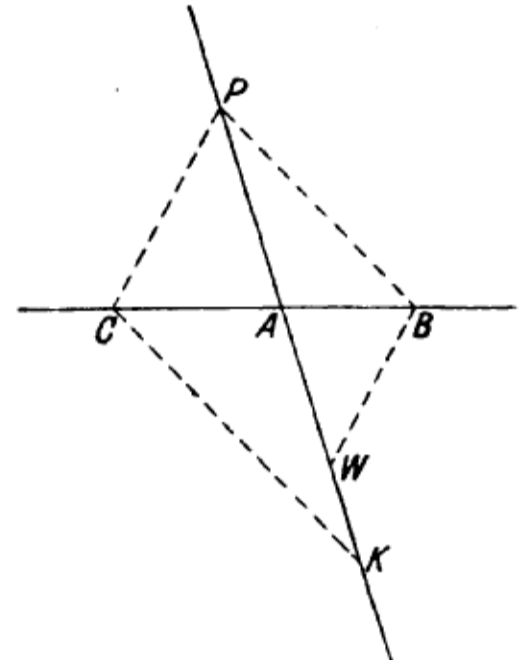


Fig. 142b.

mit A , W und P , ziehe $PC \parallel WB$ bis zum Schnittpunkt C mit der Geraden AB und $CK \parallel BP$, so schneidet CK den Polstrahl PA in dem gesuchten Krümmungsmittelpunkt K . Denn weil zufolge der Konstruktion

$$\triangle AWB \sim \triangle APC$$

und

$$\triangle APB \sim \triangle KAC,$$

so folgt

$$\overline{AW} : \overline{AP} = \overline{WB} : \overline{PC} = \overline{PA} : \overline{AK},$$

also

$$\overline{AW} = \frac{\overline{AP}^2}{\overline{AK}} = \frac{\rho^2}{k},$$

was zu beweisen war. Mittels derselben Konstruktion, nur in anderer Reihenfolge, erhält man den Wendepunkt W auf dem Polstrahl, wenn A , K und P gegeben sind.

Aus der Konstruktion lassen sich wesentliche Folgerungen für die Bewegung einer Ebene ableiten, die durch die Bahnen zweier ihrer Punkte bestimmt wird. Es seien (s. Fig. 143) A_1 und A_2 diese

Punkte, K_1 und K_2 die Krümmungsmittelpunkte ihrer Bahnen a_1 , bzw. a_2 , dann liegt der Pol P im Schnitt von K_1A_1 und K_2A_2 . Ist ferner C der Schnittpunkt von A_1A_2 und K_1K_2 , und wir ziehen $PB \parallel K_1K_2$ und legen durch B die Parallele zu PC , so schneidet diese die Polstrahlen PA_1 , bzw. PA_2 zufolge der vorigen Konstruktion in den Wendepunkten W_1 , bzw. W_2 , wie man unmittelbar erkennt. Nennt man die Gerade PC die Kollineationsachse, wie gebräuchlich, so ersieht man, daß die Verbindungslinie der Wendepunkte auf zwei Polstrahlen der zugeordneten Kollineationsachse parallel ist.

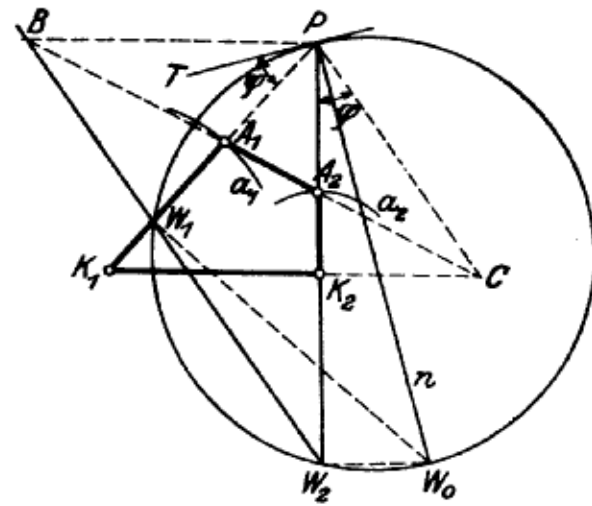


Fig. 143.

Errichtet man in W_1 und W_2 die Senkrechten zu den Polstrahlen PA_1 , bzw. PA_2 , so schneiden sich erstere im Wendepol W_0 . Damit ist zugleich die Polkurvennormale PW_0 festgelegt.

Da die vier Punkte P, W_1, W_2 und W_0 auf dem Wendekreis liegen und die Tangente PT an letzteren (s. Fig. 143) zugleich die Polkurventangente ist, so folgt, daß

$$\angle TPW_1 = \angle PW_0W_1 = \angle PW_2W_1.$$

Da ferner

$$PC \parallel W_1W_2,$$

so muß auch

$$\angle PW_2W_1 = \angle CPW_2$$

sein, und so ergibt sich die als Bobillierscher Satz bekannte Beziehung

$$\angle TPA_1 = \angle CPA_2,$$

d. i. die Polkurventangente und die Kollineationsachse schließen mit den beiden gegebenen Polstrahlen gleiche Winkel im entgegengesetzten Sinne ein.

Aus diesem Satz geht nicht nur eine einfache Ermittlung der Polkurventangente hervor, die unabhängig von der Kenntnis des Wendekreises ist, sondern auch die Aronholdsche Konstruktion

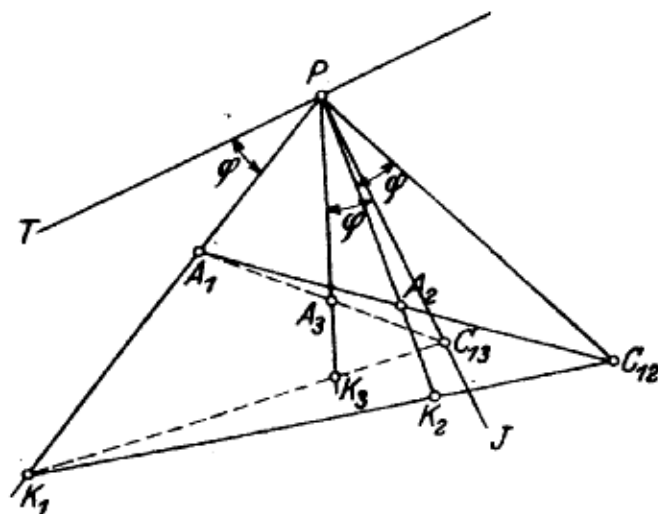


Fig. 144.

des Krümmungsmittelpunktes der Bahn eines beliebigen Punktes der Ebene. Es sei (s. Fig. 144) A_3 dieser Punkt, dann legen wir

PROPERTY
 DEPARTMENT
 MACHINE DESIGN
 SIBLEY SCHOOL
 CORNELL UNIVERSITY
 RECEIVED 3/14/27

