CHAPITRE II.

Théorie des Engrenages.

1. LORSQUE deux roues dentées engrènent l'une dans l'autre, la plus grande se nomme *roue*, et la plus petite s'appelle *pignon*. Dans les moulins à eau, les roues dentées s'appellent *rouets*, parce qu'elles sont plus petites que la roue qui reçoit directement l'action de l'eau, et qu'on nomme simplement *roue*.

Dans les petites machines, on fait ordinairement les petites roues d'une seule pièce, qu'on fend en plusieurs parties égales pour y faire des dents; alors ces petites roues se nomment *pignons*.

Dans les grandes machines, au lieu des pignons d'une seule pièce, on assemble parallèlement entre eux, et à distances égales, plusieurs fuseaux cylindriques ou coniques dans des plateaux ronds; cet assemblage se nomme *lanterne*, et les plateaux ronds *tourtes* ou *tourteaux*.

Dans les petites machines où les dents sont toutes d'une même pièce avec le corps de la roue, on les nomme proprement *dents*. Dans les grandes machines où les dents sont chacune d'une pièce particulière, on les nomme *aluchons*.

Il y a deux espèces d'engrenages, l'un extérieur, qui est le plus en usage, et l'autre intérieur; lorsqu'il est extérieur, chaque dent des roues est formée de deux parties égales, et symétriquement placées par rapport à l'axe de rotation. Il résulte de cette disposition des dents, que lorsque deux roues engrènent l'une dans l'autre, elles peuvent se transmettre le mouvement de rotation dans deux sens différens; la surface d'une moitié de dent est en partie courbe et en partie plane; la portion courbe termine ce qu'on appelle proprement *la dent*; l'autre portion appartient au flanc; la dent d'une des roues conduit l'autre roue, en prenant le *flanc* de celle-ci, et réciproquement.

Jusqu'à présent on ne s'est occupé que de la forme à donner à la portion courbe des dents; dans ce chapitre, nous déterminerons rigoureusement la grandeur des flancs d'une des roues, d'après la grandeur des dents de l'autre roue, et nous assignerons la forme qu'on doit donner aux creux de deux dents consécutives, c'est-à-dire, à l'intervalle qui les sépare. La solution de ces dernières questions est très-importante dans la pratique; on conçoit en effet qu'étant donné le solide *minimum* destiné à former le corps d'une des roues; il est extrêmement utile de n'enlever du solide donné, que ce qui peut s'opposer au libre passage des dents de l'autre roue.

Du mouvement de rotation de deux cercles qui se touchent; ou de deux roues qui ont ces cercles pour base.

2. Supposons d'abord que les deux cercles soient situés dans le même plan et qu'ils se touchent; que chacun de ces cercles soit mobile autour de sa ligne des pôles, c'est-à-dire, de la droite qui passe par son centre, et qui est perpendiculaire à son plan, une force constante F dirigée suivant la tangente de l'un ou l'autre cercle, les fera évidemment tourner

en même tems avec des vîtesses égales, car l'un des deux cercles roulant sur l'autre, les arcs. que chaque point de la circonférence de ces cercles décrivent dans le même tems, sont égaux, et ces arcs sont les mesures des vîtesses; de plus, les momens de la force F par rapport aux centres des cercles sont proportionnels aux rayons de ces cercles; car en nommant R et R' ces rayons, les momens ont pour valeurs $F \times R$ et $F \times R'$.

3. On conçoit que le mouvement d'un des cercles peut se transmettre à l'autre cercle par l'élément suivant lequel ils se touchent; mais dans la pratique, le frottement les aurait bientôt désunis, et pour continuer le mouvement de rotation des deux cercles, en satisfaisant aux mêmes conditions, de conserver des vîtesses égales et des momens proportionnels aux rayons, on forme des dents sur les bords de chacun des cercles; les lignes qui forment le contour de ces dents doivent satisfaire à cette condition, que l'une des dents poussant l'autre dent suivant une normale commune à ces lignes, les deux cercles se meuvent, comme s'ils étaient conduits par une force unique tangente à l'une ou l'autre circonférence.

4. Considérant les cercles des rayons R et R', comme les bases de deux roues cylindriques, et les lignes qui terminent les dents, comme les bases de deux solides cylindriques, ces lignes contours des dents, doivent se toucher dans toutes leurs positions, et la normale commune qui varie pour chaque position des cercles, doit passer par le point de contact de ces cercles, qui ont pour rayon R et R'. Supposons en effet que ces conditions soient remplies, et nommons B et B' les perpendiculaires abaissées des centres fixes sur la normale commune; soit φ la force qui est dirigée suivant la normale, et dont le moment par rapport au centre du cercle du rayon R, est égal au moment de la force F,

on aura :

$$\varphi \times B = F \times R, \qquad \text{donc} \quad \varphi = \frac{F \times R}{B}.$$

Cette force φ a pour moment par rapport au centre du cercle du rayon R', $\varphi \times B'$; or, la normale passant par le point de contact des deux cercles des rayons R et R', on a.... $R:R'::B:B'$, donc le moment $\varphi \times B' = \frac{FR}{B} \times \frac{BR'}{R} = F \times R'$; donc les momens par rapport aux centres des cercles des rayons R et R' n'ont pas changé, puisqu'étant pour l'un $F \times R$, il est toujours pour l'autre $F \times R'$; donc les deux cercles se meuvent comme s'ils étaient conduits par une force unique F, qui serait dirigée suivant la tangente à l'un des cercles.

5. Le frottement des deux dents qui transmettent le mouvement de rotation aux deux cercles, dépend de la force φ dirigée suivant la normale commune à ces cercles; or, cette force est variable, puisqu'elle a pour expression $\frac{F \times R}{B}$, dans laquelle B varie, donc plus la normale se rapprochera des centres de rotation et plus le frottement sera considérable. Pour rendre le frottement le plus égal possible, on multiplie dans les roues les dents; tandis qu'une dent de la première roue engrène avec une autre dent de la seconde roue, ces deux roues ne tournent que d'un petit arc; la quantité B varie peu, et le frottement ne change pas sensiblement.

6. Les courbes qui conduisent deux cercles tangens l'un à l'autre, comme ils le seraient par une force unique dirigée suivant la tangente à l'un d'eux, sont du genre de celles qu'on nomme *épicycloïdes;* il y a deux espèces d'épicycloïdes, l'une plane et l'autre sphérique.

De l'Epicycloïde plane, Pl. Ire., chap. 2.

7. Lorsque deux cercles qui se touchent, sont dans un même plan, et que l'un des deux roule sur l'autre sans cesser de le toucher, un point quelconque du cercle mobile décrit une courbe qu'on nomme *épicycloïde plane*.

8. Le cercle mobile peut rouler ou à l'extérieur ou à l'intérieur du cercle fixe; dans ce dernier cas, si le cercle mobile a pour diamètre un rayon du cercle fixe, l'épicycloïde devient une ligne droite; cette droite est le rayon du cercle fixe qui passe par le point où il est touché par le cercle mobile, considéré dans sa première position; en effet, soit B, pl. I, chap. II, fig. 1, le point où le cercle mobile, dans sa première position $AHKB$, touche le cercle fixe $EGBF$; dans une autre position quelconque ACD, il touche le cercle fixe en D, et prenant l'arc DC de même longueur que l'arc BD; le point C sera un des points de la ligne décrite par le point mobile B du cercle $AHKB$; or, le point C sera nécessairement sur le rayon AB; en effet, qu'on suppose un moment qu'il soit en C' hors du rayon AB; l'angle BAD a pour mesure, ou l'arc BD entier, ou la moitié de l'arc CD; or, cet arc CD est d'un rayon moitié de celui de l'arc BD, donc pour qu'il soit en degrés double de l'arc BD, il faut que ces deux arcs soient de même longueur; mais l'arc DC' est par construction de même longueur que l'arc DB, donc les deux arcs DC et DC' sont de même longueur, et comme ils appartiennent au même cercle, ils sont égaux; donc ces points C et C' se confondent; d'où il suit que l'épicycloïde décrite par le point B du cercle mobile $AHKB$, se réduit à la ligne droite AB.