r est donc le rapport de la longueur d'un arc de cercle à l'angle des deux tangentes, rapport indépendant de la position de ces tangentes; donc, le rayon est la mesure de la courbure de deux éléments consécutifs du cercle, qui se confondent avec deux tangentes infiniment voisines; donc cette courbure est constante.

La courbure de deux éléments consécutifs d'une courbe sera mesurée par le rayon du cercle tangent à la courbe, ayant avec elle deux éléments communs, deux tangentes infiniment voisines communes. Le centre de ce cercle est le centre de courbure de la courbe pour ces éléments.

CHAPITRE II.

COMPOSITION DES MOUVEMENTS ET DES VITESSES.

14. *Des mouvements simultanés.* — Un point matériel peut avoir simultanément plusieurs mouvements; ainsi, par exemple, une personne qui se promène sur le pont d'un bateau possède le mouvement du bateau lui-même, et, de plus, celui qu'elle se donne en se promenant. Si elle porte une montre, les aiguilles possèdent, outre les deux mouvements précédents, celui que leur imprime l'action du ressort. L'expérience prouve que les différents mouvements que possède un corps se produisent tous simultanément, sans modification réciproque; en d'autres termes, que le mouvement particulier d'un point s'effectue de la même façon, quels que soient d'ailleurs ceux auxquels il peut être soumis avec les autres points voisins; c'est là le fondement de la mécanique; c'est, comme on le voit, une base expérimentale. Mais c'est moins d'une expérience directe et spéciale que de l'ensemble des faits qui ont lieu à chaque instant sous nos yeux, que résulte la démonstration rigoureuse du principe dont nous parlons.

15. *Composition des chemins parcourus et des vitesses.* — Le principe des mouvements simultanés permet de déterminer le

mouvement absolu d'un point, connaissant son mouvement d'entrainement et son mouvement relatif.

Considérons, par exemple, un point matériel O animé d'un mouvement uniforme sur la droite OA, et supposons qu'en même temps cette droite se meuve avec une vitesse constante, de façon que tous ses points décrivent des droites égales dans des temps égaux et parallèles à OB; le point matériel possédera donc simultanément deux vitesses, l'une suivant OA, l'autre suivant OB.

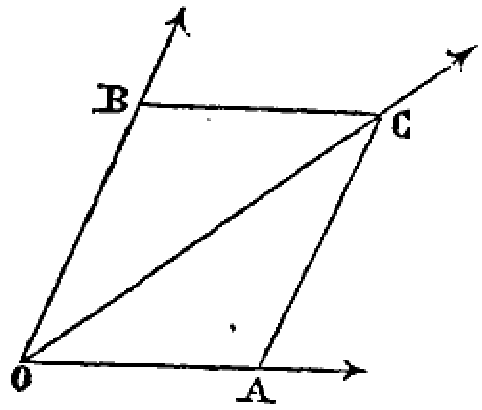

Fig. 14.

Au bout d'un certain temps quelconque d'ailleurs, la droite OA sera venue en CB; mais, sur cette droite, le mouvement du point n'aura pas subi d'altération. Si donc l'on suppose que dans le temps considéré il eût parcouru l'espace OA, pour avoir sa position actuelle, il suffit de mener CB égale et parallèle à OA; le point se trouvera donc à l'extrémité de la diagonale du parallélogramme OBCA. Or, nous avons considéré un intervalle de temps quelconque; si nous eussions pris, par exemple, un temps moitié moindre, nous en aurions conclu que le point devrait se trouver à l'extrémité de la diagonale du parallélogramme construit sur la moitié de OA et la moitié de OB, c'est-à-dire au milieu de la diagonale OC; donc, le point qui ne peut tracer qu'une trajectoire, se meut, en réalité, sur cette dernière diagonale. En outre, comme dans les mouvements uniformes les vitesses sont mesurées par les espaces parcourus dans le même temps, on voit que si on représente par OA et OB les vitesses simultanées élémentaires, la vitesse résultante est représentée par OC. On est donc conduit à ce théorème général : *Lorsqu'un point matériel est soumis à deux vitesses simultanées constantes pendant un temps infiniment petit, son mouvement élémentaire réel s'effectue suivant la diagonale du parallélogramme construit sur ces deux vitesses, et avec une vitesse représentée par la longueur de cette diagonale elle-même.*

16. Donc, si un point est animé de deux vitesses, on pourra les composer en une seule, qu'on appelle la vitesse *résultante;* les vitesses données prennent le nom de vitesses *composantes.*

Réciproquement, étant donnée une vitesse, on pourra la décomposer en deux autres dirigées suivant des directions données, et dont on obtiendra la grandeur par la construction du parallélogramme. Si, par exemple, le point O (fig. 14) est soumis à la vitesse unique OC, on pourra la décomposer en deux autres suivant OA et OB, qu'on obtiendra en menant par le point C les parallèles BC et AC; car, d'après le théorème fondamental, les deux vitesses OA et OB, obtenues ainsi, se composent en une vitesse unique égale précisément à OC.

17. Si le point O était amené de trois vitesses simultanées représentées par OA, OB et OC, on peut, d'après le théorème précédent, composer les deux vitesses OA et OB, et les remplacer par la vitesse unique OD, égale à la diagonale du parallélogramme OABD. Par suite de cette composition, le point matériel peut être considéré comme soumis simultanément aux deux vitesses OC et OD, lesquelles ont pour résultante OR, diagonale du parallélogramme OCRD. Or, on voit, d'après cette construction, que OR n'est autre chose que la diagonale du parallélipipède construit sur OA, OB et OC; on est donc conduit à ce théorème : *La résultante de trois vitesses simultanées dans l'espace est représentée en grandeur et en direction par la diagonale du parallélipipède construit sur ses trois vitesses.*

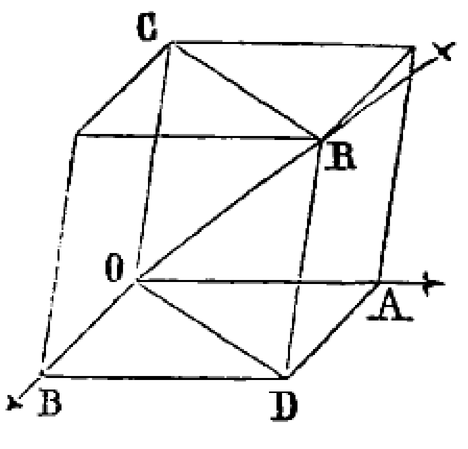

Fig. 15.

Réciproquement, une vitesse étant donnée dans l'espace, on peut la décomposer en trois autres dirigées suivant trois droites données. Soit, par exemple, la vitesse OR: on peut d'abord la remplacer par les deux vitesses OC et OD; cette dernière, à son tour, peut se décomposer dans les deux vitesses OA et OB; de sorte que, finalement, à la vitesse donnée on peut substituer les trois vitesses OA, OB et OC.

18. Considérons enfin le cas général d'un point soumis à un nombre quelconque de vitesses. En composant successivement les vitesses et leurs résultantes, on arrive à une résultante unique, et il est facile de voir que la construction revient à tracer un polygone avec les vitesses des mouvements simultanés; d'où ce théorème fort simple et fort élégant : *La vitesse résultante d'un nombre quelconque de vitesses simultanées dans l'espace est représentée, en grandeur et en direction, par le dernier côté du polygone plan ou gauche qui peut être formé en supposant que le point matériel obéisse successivement à ses diverses vitesses.*

Si le polygone se fermait de lui-même, la résultante serait nulle, c'est-à-dire que le point, sous l'action de ses vitesses simultanées, demeurerait en repos.

Nous avons raisonné dans ce qui précède sur des mouvements uniformes, *mais pendant des temps infiniment petits*, c'est-à-dire que les résultats s'appliquent à des éléments de mouvements quelconques.

19. *Composition des accélérations.*—Les propositions précédentes relatives à la composition et à la décomposition des vitesses, s'appliquent encore aux accroissements de vitesses ou accélérations qui ne sont encore que des fractions de ces vitesses, ayant même direction qu'elles, et dont les effets peuvent être analysés successivement d'après le principe des mouvements simultanés.

Soient OA, OC les vitesses à un premier moment, dont la résultante est la diagonale OO′; OB, OD ce que deviennent les vitesses avec les accélérations AB, CD; on voit par la figure qu'on obtiendra également la résultante finale OE, soit en construisant le parallélogramme OBED, soit en prenant la résultante de la première OO′ et de celle O′E diagonale du parallélogramme formé par les accélérations.

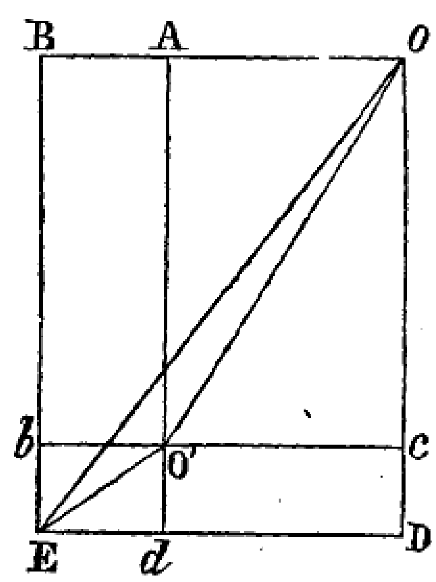

Fig. 16.

Les applications des propositions précédentes pour l'analyse des effets produits sont très-nombreuses dans la mécanique. Nous n'en donnerons ici qu'un exemple, en l'appliquant à une détermination importante : à l'accélération d'un point dans le mouvement le long d'une courbe.

20. *Accélération centripète dans le mouvement circulaire uniforme.* — Un point se meut avec une vitesse constante v, et est situé en M sur une circonférence de cercle de rayon r (fig. 17). Cette vitesse peut être représentée en grandeur et en direction par une longueur MA prise sur la tangente au point M.

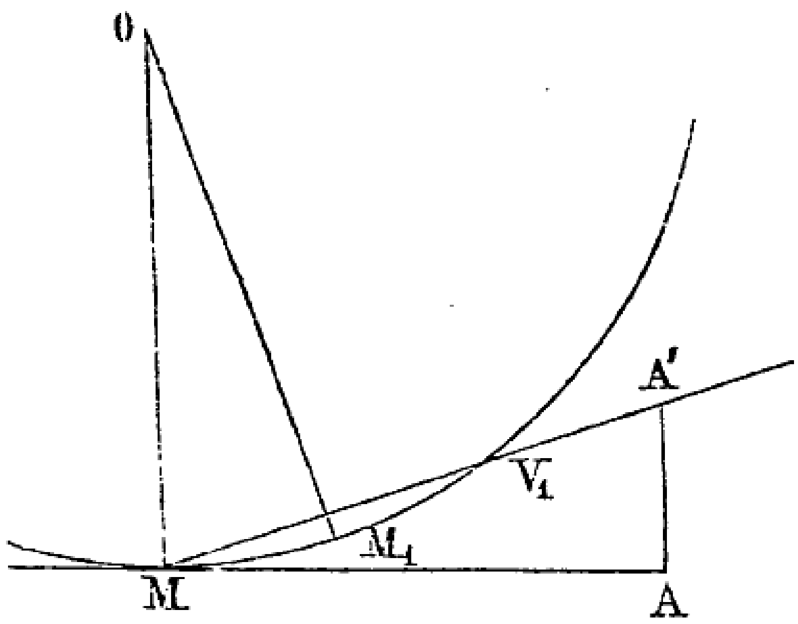

Fig. 17.

Après un temps infiniment petit t, le point O est arrivé en M_1, l'arc $MM_1 = vt$, et l'on aura sa vitesse en grandeur et en direction en menant par le point M une droite $MA' = v$ parallèle à la tangente en M_1 ou perpendiculaire au rayon OM_1. Or, cette vitesse est ce qu'est devenue la vitesse MA; c'est donc la résultante de cette vitesse MA, et d'une accélération qui ne peut être représentée que par les éléments de AA', le premier étant parallèle à OM, puisque MA' est la résultante. Si j est l'accélération cherchée, on a donc $jt = AA'$. Or, les angles MOM_1, A'MA étant égaux, les arcs élémentaires seront proportionnels aux rayons, et on a :

$$\frac{AA'}{MA} = \frac{MM_1}{OM} \text{ ou } \frac{jt}{v} = \frac{vt}{r} \text{ ou enfin } j = \frac{v^2}{r}.$$

Donc, dans le mouvement circulaire uniforme, les effets résultant de la nécessité où est un point de suivre le mouvement circulaire équivalent à ceux d'une accélération constamment dirigée vers le centre, et égale au carré de la vitesse en chaque point, divisée par le rayon.

Toute courbe pouvant être remplacée en chaque point par son cercle osculateur, l'accélération normale sera pour un mouvement suivant cette courbe, en chaque point, égale au carré de la vitesse divisé par le rayon de courbure en ce point.