CHAPITRE III.

MOUVEMENT D'UN SOLIDE.

Un solide est un système de points dont les distances naturelles restent invariables, quel que soit le déplacement du système tout entier dans l'espace.

La figure du système peut être définie 1° par la connaissance des distances mutuelles de trois points A, B, C, non en ligne droite; 2° par la connaissance des distances de chacun des autres points du système aux trois points A, B, C. D'après cela, on voit qu'il suffit de connaître la position du triangle dont les trois points A, B, C sont les sommets, pour que la position du système tout entier soit connu; les mouvements que prennent simultanément ces trois points pour connaître ceux du système.

21. *Mouvement d'une figure plane dans son plan.* — Considérons d'abord une figure plane assujettie à rester dans un même plan, et dans cette figure une droite tracée à volonté et qui suffit pour déterminer complétement sa position sur le plan. Voyons ce que devient cette droite lorsque la figure se déplace d'une manière quelconque, pour venir prendre une position infiniment voisine de la première.

Soit m le point du plan où se coupent les deux positions de la droite, et marquons le point a sur la première position de la droite qui après le mouvement vient en m, et le point b sur la seconde, qui est la position qu'occupe après le mouvement le point qui était en m avant le mouvement; par suite on a nécessairement $ma = mb$.

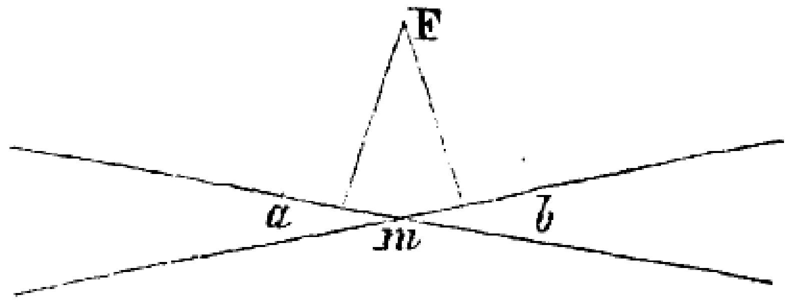


Fig. 18.

Ceci posé, élevons une perpendiculaire sur le milieu de am, et une autre sur le milieu de bm, ces deux droites se couperont en un point F, centre du cercle circonscrit aux points a, m, b, dont deux appartiennent à chacune des droites, et par suite déterminent sa position aussi bien que celle de la figure qu'elles traversent. Comme il est clair qu'on pourra amener la droite de la première position à la seconde par une rotation convenable autour du point F, on peut donc établir que : *toute figure plane peut être amenée d'une position donnée sur un plan à une autre position prise à volonté sur ce même plan, par une simple rotation autour d'un point convenablement choisi.*

Si les perpendiculaires sont parallèles, le point de rencontre se trouve à l'infini, et le mouvement de la figure est un mouvement de translation.

Admettons maintenant que le déplacement imprimé soit infiniment petit. Alors, le chemin parcouru, la trajectoire infiniment petite du point a se confond avec la droite am, et celle de b avec mb; par suite, le mouvement est en réalité une rotation autour de l'intersection des normales aux trajectoires des deux points a et b. *De là il suit que les normales aux trajectoires de tous les points de la figure passent en un même point* F, qui est *le centre instantané de rotation.*

La détermination du centre de rotation permet de calculer immédiatement les vitesses relatives de tous les points de la figure qui se meuvent sur un élément de circonférence ayant pour centre le centre de rotation, si l'on connaît également la grandeur d'une de ces vitesses. Il suffit pour cela de déterminer d'abord le centre instantané de rotation, en élevant des perpendiculaires sur les directions connues des vitesses de deux des points de la figure; la vitesse d'un point quelconque est à la vitesse connue dans le rapport des distances du centre instantané de rotation aux deux points auxquels se rapportent ces vitesses. Nous ferons dans cet ouvrage d'incessantes applications de ces importants théorèmes.

Le pied de la perpendiculaire abaissée du centre instantané de rotation sur une ligne, une courbe qui fait partie de la figure, est un point appartenant à deux positions successives de la tangente à la courbe en ce point, ou, ce qui est la même chose, il est l'intersection, suivant un élément commun, des deux positions successives de la courbe.

La connaissance du centre instantané de rotation fournit le moyen de tracer une tangente à une courbe qui peut être engendrée par le mouvement connu d'un point, sans que la courbe soit tracée. Elle est la perpendiculaire à la ligne qui joint au centre de rotation connu pour la position considérée, le point de la courbe.

Il ne faut pas confondre le centre instantané de rotation d'une figure plane, mobile dans son plan, avec le centre de courbure des trajectoires des divers points de la figure. Dans le mouvement de rotation élémentaire autour de ce centre instantané, chaque point ne décrit qu'un élément de sa trajectoire. La position du centre instantané de rotation fait connaître seulement un second point de la normale, et par suite la direction de la tangente à la trajectoire, sans rien indiquer relativement à la courbure de celle-ci.

22. Considérons toujours une figure plane assujettie à rester dans un même plan, et supposons que l'on donne à cette figure un nombre quelconque de positions différentes. Supposons qu'elle tourne actuellement autour du point O, premier centre instantané de rotation, et se déplace de l'angle α; qu'ensuite elle tourne autour de O′ et se déplace de l'angle α'; qu'ensuite elle tourne autour de $0''$ et se déplace de l'angle α'', et ainsi de suite. Avec ces données, il est facile de construire le polygone MM′M″M‴... qui, lié invariablement à la figure (F), soit tel qu'en le faisant rouler sur le polygone 0 0′0″... on fasse faire à cette figure les mouvements qui viennent d'être indiqués.

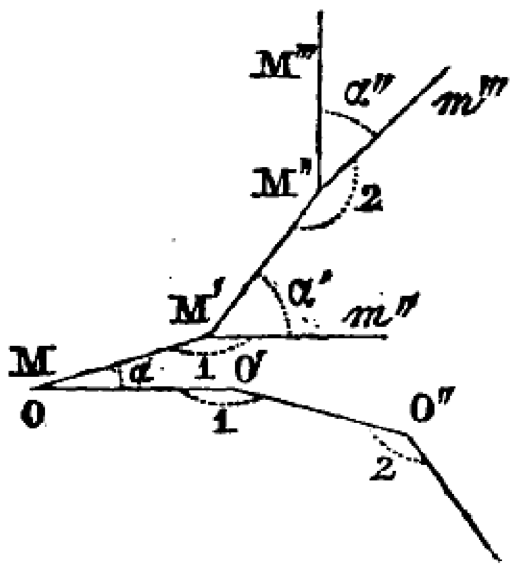


Fig. 19.

A cet effet, tracez $MM' = 00'$, et faisant l'angle $M\,00' = \alpha$; puis menez $M'm''$ faisant angle $MM'm'' =$ angle $00'0''$ et tracez $M'M'' = 0'0''$ et faisant angle $M''M'm'' = \alpha'$; menez de même M″ m''' faisant angle M′ M″ m''' = angle 0 0″ 0‴ et tracez M″ M‴ = 0″0‴ et faisant angle M‴ m''' = α''; et ainsi de suite.

Il est évident qu'on peut faire passer la figure par toutes les positions données, en faisant rouler le polygone M M′ MM″... lié invariablement à la fig. (F.) sur le polygone 0 0′ 0″...

Maintenant, supposons que les positions données de la figure soient infiniment voisines et infiniment nombreuses. Alors, les deux polygones se réduisent à deux courbes, et il en résulte que ***tout mouvement d'une figure plane dans un plan se réduit au roulement d'une courbe liée avec la figure sur une autre courbe fixe dans le plan,*** la forme de ces courbes dépendant de la loi du mouvement.

23. Définissons avec soin le mouvement de roulement, et à cet effet considérons une courbe mobile assujettie à rester dans toutes ses positions, tangente à une courbe fixe.

La courbe mobile roule sur la courbe fixe (fig. 20, 21), lorsque

Fig. 20.

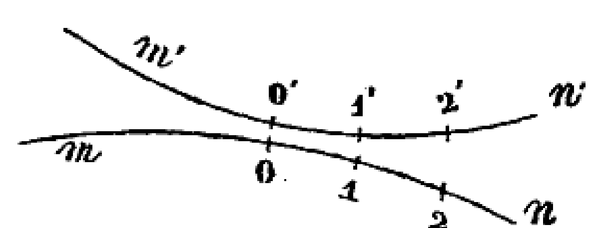
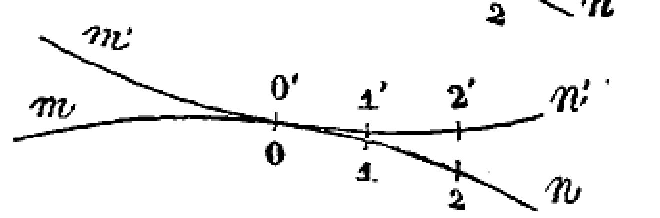


Fig. 21.



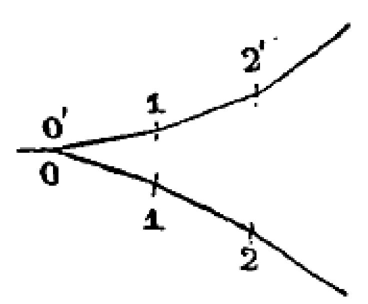


Fig. 22.

le lieu du contact parcourt à la fois sur les deux périmètres des arcs égaux en longueur.

Soient mn, $m'n'$ les courbes données : marquons un certain nombre de points 0, 1, 2, etc., 0′ 1′ 2′, etc., tels que les arcs ~~arcs~~ 0 1, 1 2, 2 3..... soient respectivement égaux en longueur aux arcs 0′ 1′, 1′ 2′...

Si à l'origine les deux courbes se touchent par les points 0 et 0′, dans la suite du roulement elles se toucheront par les couples 1 et 1′, 2 et 2′....

Réciproquement, lorsqu'à un certain instant la tangence des courbes aura lieu en un couple de points 2 et 2′, les points antérieurement confondus, 0 et 0′, par exemple, seront distants d'arcs égaux du nouveau contact, et de là résulte la connaissance des vitesses relatives de chaque point, connaissant la position du centre instantané de rotation qu'il est facile de déterminer.

En effet, concevons les deux courbes comme composées d'éléments infiniment petits, égaux de part et d'autre (fig. 22), et considérons les points 0, 1, 2, etc., 0′, 1′, 2′, etc., comme les sommets des polygones dont ces petits éléments sont les côtés; dans le roulement, les côtés correspondants devront tour à tour se superposer. Le point 1′, pour venir se confondre avec le point 1, décrira un petit arc de cercle ayant pour centre le sommet 0 0′. Tous les points de la courbe mobile, ou ceux qui, faisant corps avec elle, partageront son mouvement, décriront donc en même temps, autour du même point 0 0′, à la limite, autour du point de contact instantané, qui sera le centre de rotation, des arcs de cercle infiniment petits.

23. *Mouvement élémentaire d'une figure sphérique sur sa sphère.* — Si dans les théorèmes précédents on remplace la figure plane par une figure sphérique assujettie à rester sur une sphère fixe, et que l'on remplace les droites par des arcs de grands cercles, on obtient des théorèmes correspondants. Ainsi :

Tout mouvement infiniment petit d'une figure sphérique sur une sphère fixe se réduit à une rotation autour d'un point de la sphère comme pôle.

De là résulte que le mouvement le plus général que l'on puisse donner à une figure sphérique assujettie à rester sur une sphère fixe consiste à faire rouler une courbe liée avec la figure sur une courbe fixe tracée sur la sphère.

24. *Mouvement élémentaire d'un solide dont un point reste immobile.* — Si l'on conçoit que la figure sphérique soit liée à un corps solide retenu par le centre de la sphère, on conclura que le *mouvement le plus général d'un corps solide retenu par un point fixe se réduit au roulement d'un cône lié avec le corps sur un autre cône fixe dans l'espace.* Ces deux cônes ont leur sommet commun au point fixe, et leur génératrice de contact est à chaque instant l'*axe instantané de rotation*, autour duquel tourne le

solide tout entier, dont un point est fixe. Ainsi, tout mouvement élémentaire d'un solide, dont un point reste immobile, est une rotation autour d'un axe instantané passant par ce point, et l'ensemble des positions successives de cet axe constitue le cône fixe.

Il est à peine utile de remarquer que les théorèmes relatifs aux mouvements d'une figure dans un plan s'appliquent à des cylindres dont ces figures seraient des coupes, le centre de rotation étant alors un point de l'axe instantané de rotation parallèle aux génératrices.

25. *Mouvement élémentaire d'un solide entièrement libre.* — Quel que soit le mouvement d'un solide dans l'espace (1), on peut l'amener d'une de ses positions à une autre, en lui donnant d'abord un mouvement de translation, ensuite un mouvement de rotation autour d'un certain axe.

Soient en effet A, B, C, D (fig. 23) divers points du solide dans sa première position, et A′, B′, C′, D′, ces mêmes points dans la seconde position du solide. Joignons le point A au point A′ par une ligne droite, et menons par les points B, C, D, des droites égales et parallèles à la droite A A′. Pour amener le solide de la première position (ABCD) à la seconde (A′B′C′D′), donnons-lui d'abord un mouvement de translation rectiligne, représenté en grandeur et en direction par la ligne A A′, les points B, C, D, viendront en B″ C″ D″. Il n'y aura donc plus qu'à donner au solide un second mouvement, en vertu duquel, le point A′ restant immobile, les points B″ C″ D″ viendront en B′ C′ D′. Mais nous savons que ce second déplacement du solide peut s'effectuer par une rotation autour d'un axe passant par le point immobile A′. Donc, en définitive, on peut amener le solide de la première position (ABCD) à la seconde (A′B′C′D′), en lui

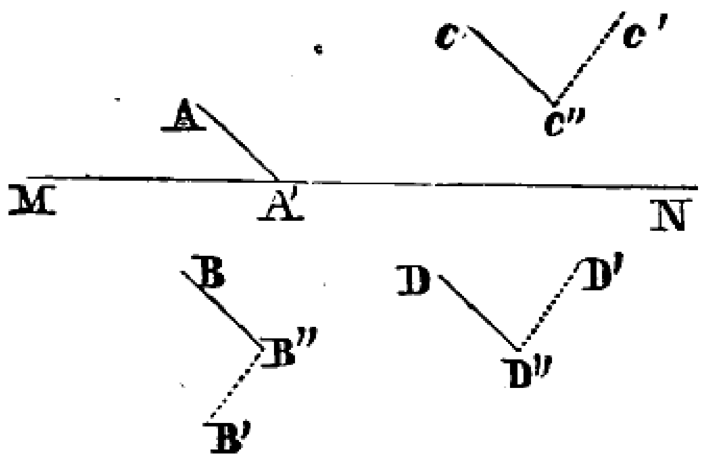


Fig. 23.

(1) Delaunay. — Mécanique rationnelle.