

## CHAPITRE VI.

DE L'ÉQUILIBRE. — DU PRINCIPE DES VITESSES  
VIRTUELLES.

43. Des principes que nous avons établis relativement à la composition des forces, on peut déduire les conditions d'équilibre d'un corps solide auquel diverses forces sont appliquées. Elles reviennent à exprimer qu'une quelconque des forces doit être égale et directement opposée à la résultante unique des autres forces, autrement le corps se mettrait en mouvement, les forces ne se détruiraient pas. Nous renverrons aux traités de Statique pour la traduction analytique de cette condition.

Nous préférons donner ici, d'après le célèbre Lagrange, la démonstration du principe des vitesses virtuelles qui fournit une équation renfermant implicitement toutes les équations qui doivent être satisfaites pour l'équilibre. Cette équation établie entre les quantités de travail que les forces produisent s'applique immédiatement aux machines, et nous donnera de suite les conditions d'équilibre de ces systèmes, but unique de tous ces préliminaires.

On appelle *vitesse virtuelle* un déplacement infiniment petit du point d'application d'une force, s'il devient possible, estimé suivant la direction de cette force; ce sont les chemins élémentaires que nous avons appelés  $H_1$ ,  $H_2$  (art. 42).

Voici comment Lagrange pose, dans toute sa généralité, le principe des vitesses virtuelles sur lequel il a fait reposer le grand édifice de sa mécanique analytique.

*Si un système quelconque de tant de corps ou de tant de points que l'on veut, tirés chacun par des puissances quelconques, est en équilibre, et qu'on donne à ce système un petit mouvement quelconque, en vertu duquel chaque point parcourra un espace infiniment petit, la somme des puissances multipliées chacune par l'es-*

pace que le point auquel elle est appliquée parcourt suivant la direction de cette même puissance (projeté sur cette puissance), sera toujours égale à zéro pour l'état d'équilibre, en regardant comme positifs les petits espaces parcourus dans le sens des puissances, et comme négatifs les espaces parcourus dans un sens opposé (dont la projection tombe en avant ou en arrière du point d'application).

Ce principe peut être démontré *à priori* comme il suit : Une poulie mobile étant soutenue par deux cordons et supportant un poids  $P$  (page 30), les deux cordons seront tendus avec une force égale à  $\frac{1}{2} P$ . Que l'on monte sur le même axe deux poulies semblables, et qu'on fasse passer le même cordon sur ces poulies et sur deux autres poulies fixes, la tension de chacun des quatre brins du cordon sera  $\frac{1}{4} P$ . Et en général, dans ce système appelé *moufle*, composé de deux systèmes de poulies, l'un attaché à un point fixe, l'autre mobile, embrassées par une même corde, dont l'une des extrémités est fixement attachée et l'autre est tirée par une puissance, celle-ci est au poids porté par le système mobile comme l'unité est au nombre de cordons qui y aboutissent. Nous faisons abstraction, bien entendu, de tout frottement et de toute roideur de la corde dans ce raisonnement (tout ce système étant combiné pour la démonstration), et alors il est bien évident qu'à cause de la tension uniforme de la corde dans toute sa longueur, le poids est soutenu par autant de puissances égales à celle qui tend la corde qu'il y a de cordons qui soutiennent les poulies mobiles, puisque ces cordons sont tous parallèles, également tendus et agissent dans des circonstances identiques.

Maintenant, supposons que chaque force qui agit sur le système soit remplacée par l'action de moufles fixées à des points extérieurs au système, dont la traction s'exerce suivant la direction de cette force. En faisant passer le même cordon sur toutes les moufles, au moyen de poulies de renvoi, la puissance

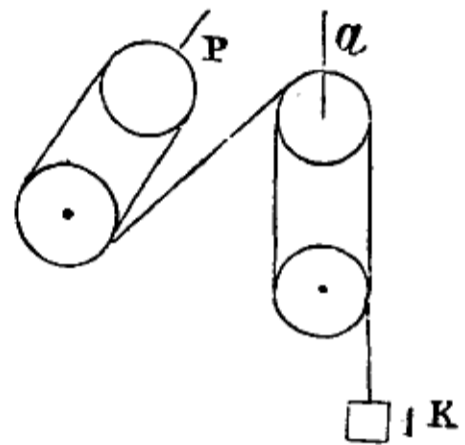


Fig. 34.

qui, appliquée à son extrémité mobile, déterminera la tension de tous les cordons, produira, à l'aide de chaque moufle, des efforts égaux à chacune des forces du système; celles-ci seront à cette puissance unique comme le nombre des cordons est à l'unité.

Substituons, pour plus de simplicité, un poids à cette dernière puissance, après avoir fait passer sur une poulie fixe le dernier cordon (ce qui ne peut changer sa tension) qui soutient ce poids, que nous prendrons pour l'unité. Ce poids produit, par le moyen de la corde qui passe sur toutes les moufles, toutes les puissances qui agissaient sur le système, chaque puissance étant mesurée par le nombre des cordons qui concourent à la produire par leur tension.

Ainsi, le poids étant de 1 kil. (fig. 34), une force de 20 kil. sera remplacée par une moufle de 20 cordons (10 poulies) dont la tension uniforme serait de 1 kil., et de même pour une force quelconque.

Pour que le système demeure en équilibre, il faut que le poids ne puisse pas descendre, car un poids tendant toujours à obéir à la gravité, s'il y a un déplacement virtuel du système qui lui permette de descendre, il descendra nécessairement, et il se produira un mouvement dans le système. La condition de l'équilibre est donc que ceci ne puisse avoir lieu.

Désignons par  $a, b, c$ , etc., les espaces infiniment petits qu'un mouvement, s'il se produisait, ferait parcourir aux différents points du système, suivant les directions des puissances qui les tirent (projetés suivant la direction de ces puissances), et par  $P, Q, R$ , etc., les nombres des cordons des moufles appliquées à ces points pour produire ces mêmes puissances, il est visible que les espaces  $a, b, c, \dots$  seront aussi ceux dont les poulies mobiles se rapprocheraient des poulies fixes qui leur répondent (les cordons étant parallèles à la direction des puissances), et que ces rapprochements diminueraient la longueur de la corde qui les embrasse des quantités  $Pa, Qb, Rc$ , etc.; de sorte qu'à cause de la longueur invariable de la corde, le poids descendrait de la longueur de la somme algébrique  $Pa + Qb + Rc$ , etc.

Donc il faudra pour l'équilibre des puissances représentées par les nombres  $P$ ,  $Q$ ,  $R$ , etc., que l'on ait l'équation :

$$Pa + Qb + Rc... = 0.$$

Ce qui est l'expression analytique du principe général des vitesses virtuelles.

Si la quantité  $Pa + Qb + Rc...$ , au lieu d'être nulle, était négative, si les produits à soustraire étaient plus grands que ceux à ajouter, l'équilibre n'aurait pas lieu, puisqu'en prenant un déplacement virtuel complètement opposé de direction au premier, on trouverait une valeur positive pour le déplacement du poids.

Réciproquement, si l'équation ci-dessus est satisfaite pour tous les déplacements possibles infiniment petits du système, il sera nécessairement en équilibre; car le poids demeurant immobile dans ces déplacements, les puissances qui agissent sur le système restent dans le même état pour des déplacements virtuels directement opposés deux à deux; il n'y a donc pas plus de raison pour qu'elles produisent plutôt l'un que l'autre de ces deux déplacements. C'est le cas de la balance qui demeure en équilibre, parce qu'il n'y a pas plus de raison pour qu'elle s'incline d'un côté plutôt que de l'autre.

44. Le principe des vitesses virtuelles peut nous servir à retrouver les diverses propositions déjà établies, car, par sa généralité même, il se trouve comprendre tous les cas de l'équilibre.

Considérons le parallélogramme des forces.

Un point sollicité par deux forces sera en équilibre si on lui applique une force égale, et directement opposée à la résultante de ces deux forces. Supposons un déplacement virtuel  $r$  dans la direction de cette résultante  $R$ , on aura :

$Rr = Pr \cos. \alpha + Qr \cos. \alpha'$  ou  $R = P \cos. \alpha + Q \cos. \alpha'$ , expression qui représente la longueur de la diagonale du parallélogramme construit sur  $P$  et  $Q$  (fig. 35).

45. *Forces parallèles.* — Soient  $P$  et  $Q$  deux forces parallèles,  $R$  une force égale et directement opposée à la résultante.

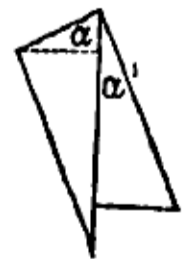


Fig. 35.