

Donnons un petit déplacement r dans la direction de ces forces, on devra avoir pour l'équilibre $Rr - Pr - Qr = 0$, ou $R = P + Q$, si P et Q sont des signes contraires, et $R = P - Q$.

Faisons tourner le système d'un petit angle ω autour du point d'application de la résultante; p et q étant les distances du point d'application de la résultante aux points d'application des deux forces P et Q , on aura, le déplacement de la force R étant nul,

$$Qq\omega - Pp\omega = 0 \text{ ou } Qq = Pp.$$

CHAPITRE VII.

DES MACHINES.

46. On donne le nom de machines à des systèmes de corps destinés à transmettre le travail des forces de manière à l'appliquer à une opération utile, ce qui ne peut avoir lieu en général que parce qu'elles modifient l'action de ces forces, et fournissent des mouvements convenables, comme vitesse et comme direction, pour le but à atteindre. Les machines constituent donc les systèmes indiqués au début comme objet principal de la cinématique.

Ce sont surtout les variations du chemin parcouru, objet spécial de ce traité, qui rendent les machines propres à une infinité d'usages industriels. Ces variations déterminées ne sauraient avoir lieu sur un corps entièrement libre, ne pouvant par suite qu'obéir aux forces qui agissent sur lui, que prendre le mouvement qui résulte de leur direction. C'est en modifiant le mouvement d'un corps par des obstacles, par des points fixes, que le travail des forces devient utilisable par machines, et que le mouvement est transformé de manière à satisfaire à toutes les conditions nécessaires pour le besoin des arts.

Que des points fixes transforment les mouvements d'un système qui sans eux se déplacerait sous l'action des forces qui y sont appliquées, cela est bien évident. Nous allons étudier bientôt les mouvements ainsi engendrés; mais, auparavant, voyons com-

ment ces points interviennent dans l'équilibre des forces qui agissent sur le système.

47. On comprend facilement comment, par l'intervention de points fixes, des forces de grandeurs quelconques peuvent se faire équilibre. Dans de pareils systèmes, il n'est plus nécessaire que les résultantes des forces qui agissent sur eux soient nulles d'elles-mêmes, il suffit que leurs directions rencontrent les points fixes, obstacles inébranlables qui les annulent par leur résistance.

Ainsi, à l'aide d'un corps solide qui s'appuie sur un point fixe, d'un levier, une force minime fera équilibre à une très-grande force, si elle est disposée à l'égard de celle-ci de manière que la résultante des deux forces passe par le point fixe; d'où l'on voit que la plus petite force ne détruit pas la plus grande, ce qui serait impossible, mais qu'elle ne sert en quelque sorte qu'à détourner l'effort de la plus grande et à la faire passer avec le sien propre combiné vers un obstacle invincible. Cet obstacle agit comme une force égale à la résultante et de sens opposé, et par suite en détruit l'effet.

48. *Principe de la transmission du travail.* — Lorsque le mouvement d'une machine devient uniforme, ce ne peut être que parce qu'aucune force nouvelle ne vient agir sur le système, ou plus généralement parce qu'en chaque instant les puissances qui tendent à produire l'accélération sont détruites par les résistances qui s'y opposent. Cette uniformité, à laquelle arrive toute machine lorsqu'elle est en mouvement un temps un peu considérable, permet d'étudier les relations des forces qui agissent sur les machines à l'aide de l'important principe de la *transmission du travail* qui devient alors applicable. Il consiste en ce que : *Quand une machine a pris un mouvement uniforme, le travail moteur est égal au travail résistant pour un même intervalle de temps.*

Ce principe n'est autre chose que l'expression de l'équilibre des forces motrices et résistantes, d'après le principe des vitesses virtuelles.

En effet, $P P' \dots$ étant les puissances, $R R' \dots$ les résistances, $p p' p'' \dots$ les éléments de chemins parcourus par les pre-

mières, $r r' r'' \dots$ les chemins parcourus par les secondes, on aura pour l'équilibre entre les puissances et les résistances $\Sigma P p = \Sigma R r$. Or, il faut remarquer que les vitesses virtuelles ne peuvent plus former, pour une machine, qu'un seul système de valeurs, celui des seuls déplacements compatibles avec les points fixes du système; et que les termes $P p$, $R r$ représentent le travail moteur et le travail résistant élémentaire des forces qui agissent sur la machine en mouvement. L'introduction de points fixes réduit donc à cette seule équation les conditions d'équilibre des forces dans les machines.

49. Le principe de la transmission du travail résulte clairement de la notion du travail, et de la manière dont le mouvement uniforme s'établit dans une machine.

Supposons, en effet, que des puissances agissent en certains points d'une machine et des résistances en d'autres points. Si la machine est d'abord au repos, il faut bien pour l'en faire sortir que le travail du moteur l'emporte sur celui de la résistance, sans quoi l'effet serait plus grand que la cause. Le mouvement se produit et s'accélère tant que la supériorité du travail élémentaire de la puissance sur celui de la résistance subsiste. Or, en même temps que la vitesse augmente, l'effort du moteur diminue; tandis que les résistances deviennent croissantes. Par conséquent, pendant l'augmentation de vitesse de la machine, le travail élémentaire du moteur décroît, et celui des résistances croît de plus en plus. Lorsqu'ils sont égaux, ils se détruisent en chaque instant, et le mouvement demeure nécessairement uniforme : il n'existe plus de causes de retard ou d'accélération. Donc, quand le mouvement est uniforme, il y a égalité entre la somme du travail des forces motrices et la somme du travail des forces résistantes.

L'important principe de la transmission du travail exprimé par la relation ci-dessus est vrai, non-seulement pour un mouvement uniforme, mais encore pour un mouvement périodique composé de périodes identiques entre elles, comme on le voit facilement en remplaçant les forces et les vitesses variables par

leur valeur moyenne. Il est évident qu'il faudra dans ce cas considérer des périodes complètes pour égaler le travail moteur et le travail résistant.

Dans les chocs, il se produit des déformations, un travail de forces moléculaires, étrangères à celles dont on tient compte dans l'étude du mouvement, et qui apparaissent lors du choc; l'égalité ci-dessus ne peut plus alors être appliquée. Il nous suffit d'établir ici qu'il y a toujours dans un choc consommation d'une partie du travail moteur.

50. Le travail résistant devra, dans la formule ci-dessus, comprendre non-seulement le travail industriel utilement effectué par la machine, mais encore le travail de toutes les résistances passives, frottement, roideur des cordes, etc., que la mécanique enseigne à évaluer. Ces résistances dites passives ne prennent naissance que lors du mouvement produit indépendamment d'elles; elles peuvent retarder et empêcher le mouvement, mais non le produire.

La relation $\Sigma P p = \Sigma R r$ est souvent employée sous une autre forme, pour bien distinguer le travail des diverses forces.

Soit T_m le *travail moteur* total transmis à la machine, T le *travail résistant principal*, ou celui consommé par l'opération industrielle que la machine est destinée à effectuer, et T' le *travail résistant secondaire*, dû aux résistances propres de la machine, l'équation ci-dessus reviendra à $T_m = T + T'$ ou $T = T_m - T'$. La mécanique appliquée se propose de rendre T un maximum. Il n'est pas besoin de remarquer que T' ne pouvant jamais être nul, T ne saurait jamais être égal à T_m ; une machine ne peut donc jamais rendre un travail égal au travail moteur; il n'y a donc pas de multiplication du travail, de mouvement perpétuel possible.

Le but des machines ne peut être que de transformer les facteurs du travail $P p...$ du moteur, en des termes $R r...$ représentant un travail *utile* dont la somme approche le plus possible de celle du travail moteur, et dont les facteurs R ou r sont déterminés en raison du but à atteindre, de l'opération industrielle que la machine doit effectuer.

DU MOUVEMENT DANS LES MACHINES.

51. Nous avons défini les machines des systèmes gênés par des obstacles ayant des points fixes. Voyons comment l'introduction de ces points fixes modifie le mouvement d'un corps.

Soit un corps soumis à l'action de forces, et faisons croître le nombre de points fixes faisant obstacle à son mouvement; nous rencontrerons les trois cas suivants :

1° Le corps a *un point fixe*; le corps ne pouvant pas surmonter cet obstacle ne pourra que tourner en tous sens autour de ce point; c'est ce qui constitue la machine simple, appelée *levier*. Le mouvement d'un point quelconque, appartenant au levier, sera de nature *circulaire*, en chaque instant, et de plus en général *alternatif* dans une machine, se produisant le plus souvent dans un plan.

2° Le corps a *deux points* ou une *droite fixe*; dans le cas général où la résultante de toutes les forces agissant sur le corps ne passera pas par cette droite, il se produira un mouvement de rotation autour de celle-ci, un *mouvement circulaire continu*. Le *tour* est la machine simple, type du mouvement circulaire.

3° L'obstacle consiste *en trois points* fixes ou en un *plan inébranlable* passant par ces trois points. Dans le cas général, le corps se mouvra suivant un élément linéaire de ce plan, ne pouvant que glisser et non déplacer des obstacles inébranlables qu'il faut supposer ici ne pas appartenir au corps, car alors il resterait nécessairement immobile.

Le mouvement ayant lieu en chaque instant suivant un élément linéaire de ce plan, l'ordre de la succession de ces éléments déterminera le *mouvement rectiligne* ou suivant une *courbe donnée*.

Le *plan incliné*, ainsi nommé parce qu'on considère le plus souvent le plan fixe supportant des corps pesants et inclinés à l'horizon, est la machine simple type de ce genre de mouvement.

Le nombre de points fixes, non en ligne droite, peut être plus

grand que trois; mais il n'en résulte pas de nouveau genre de mouvement. En effet, trois points fixes déterminant, pendant un instant, le mouvement le long du plan passant par ces trois points, il s'ensuit qu'un plus grand nombre de points ne déterminera pas la nature du mouvement en chaque instant plus que trois points; ils ne constitueront pas un nouveau système, mais seulement la succession de systèmes semblables entre eux. Si d'autres points fixes sont convenablement disposés pour permettre le mouvement, ils pourront servir seulement à déterminer la direction des mouvements élémentaires, fournir des guides courbes par exemple. Un nombre de points plus grand que trois ne sert donc qu'à assurer les directions des mouvements successifs dans un même plan ou dans des plans successifs, mais ne fournit pas de système nouveau. De ceci résulte une importante conséquence, c'est que les seules machines simples sont : le levier, le tour et le plan, et que, si l'on décompose en leurs derniers éléments les systèmes complexes appelés machines, ces derniers éléments seront nécessairement un de ces systèmes.

52. Quant aux mouvements produits, on déduira encore cette conséquence non moins essentielle, que, puisque les obstacles qui gênent le mouvement des systèmes de corps qui constituent les machines ne peuvent fournir que l'un des trois systèmes précédents, les mouvements produits sont nécessairement ceux engendrés dans le genre *levier*, ou dans le genre *tour*, ou dans le genre *plan*, en comprenant dans ce dernier les successions de plans, les surfaces courbes, etc. Par suite, les mouvements élémentaires seront tous ou circulaires alternatifs, ou circulaires continus, ou enfin rectilignes ou suivant une courbe selon la succession des éléments linéaires dans le système plan. Remarquons au reste que, tous les mouvements quelconques pouvant être réduits à des translations et rotations successives, les organes ci-dessus fournissent les moyens de réaliser théoriquement, par leur combinaison et leur succession, un mouvement quelconque.

53. On doit entrevoir, dès à présent, combien cette observa-