

point. Ces cercles ayant deux éléments communs avec les courbes, leurs rayons resteront constants pendant le contact d'un élément; c'est-à-dire que pendant le temps dt tout se passera comme si aux deux sections courbes données on avait substitué momentanément deux leviers, AC, BD, réunis par la base CD articulée aux points C et D avec les deux leviers. On aura donc à l'instant considéré la relation

$$\omega : \omega_1 :: BT : AT,$$

c'est-à-dire que dans une transmission de mouvement par simple contact entre l'organe conducteur et l'organe conduit, les vitesses angulaires des deux pièces qui se commandent réciproquement sont à chaque instant inversement proportionnelles aux segments suivant lesquels la normale commune, menée au point de contact correspondant, divise la ligne qui joint les deux centres de rotation.

CHAPITRE PREMIER.

Mouvement circulaire continu en circulaire continu.

Le mouvement circulaire continu étant produit par le système tour, par la rotation autour d'un axe, cette transformation consiste à communiquer le mouvement d'un système tour à un autre système de même nature.

Les divers organes que nous étudierons consistent dans des moyens d'établir cette communication.

MOUVEMENTS RELATIFS.

Nous allons commencer par l'étude géométrique des mouvements relatifs pour le cas le plus intéressant, celui où les deux mouvements se passent dans un même plan, où les axes de rotation sont parallèles.

DU ROULEMENT ET DU GLISSEMENT.

150. Soient deux pièces AC, BD (fig. 127), qui se conduisent l'une l'autre par contact immédiat, en tournant autour de leurs centres de rotation A et B, et soit m leur point de contact à l'origine du mouvement. En passant de cette position à

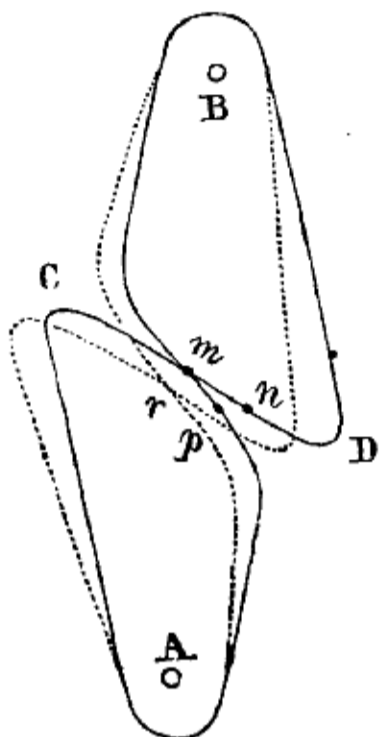


Fig. 127.

une autre quelconque, les points n de B et p de A sont venus en contact en r . Ce mouvement n'a pu avoir lieu sans que chacun des points de l'arc mp de l'une des courbes ait été successivement en contact avec l'un des points de l'arc mn de l'autre courbe. Si les arcs mp , mn sont inégaux, il y a eu nécessairement *glissement* le long d'un chemin égal à la différence des arcs élémentaires; si au contraire $mp = mn$, aucun glissement n'a eu lieu, et il n'y a eu que *roulement* d'un arc sur l'autre.

151. On peut se rendre compte qu'il se produit, en général, un glissement dans la poussée de deux courbes quelconques, et déterminer géométriquement le rapport de l'étendue du glissement à l'arc parcouru en chaque instant, par la méthode suivante que nous empruntons aux *Principles of Mechanism* de M. Willis.

Étendue du glissement. — Soient A, B (fig. 128) les centres de rotation de deux pièces quelconques qui se conduisent par contact; BM, AM la position de ces pièces à un instant quelconque du contact; MD la normale commune en leur point de contact M; Bm, Am les positions des pièces dans une situation du système infiniment voisine de la première, m étant le nouveau point de contact; p , n les positions nouvelles des points des pièces A et B qui étaient en contact en M. Joignez les points p et n ; pour un mouvement infiniment petit, pn sera une droite perpendiculaire à la normale commune MD, le déplacement ne

pouvant s'effectuer que suivant l'élément commun, elle sera la différence $mp - mn$ des arcs qui ont glissé l'un sur l'autre, et elle exprimera l'étendue du *glissement*. De même, pour un mouvement élémentaire, Mp sera une perpendiculaire à AM (la rotation se faisant autour du point A), et Mn à BM ; on a donc :

$$\frac{pn}{pM} = \frac{\sin. pMn}{\sin. pnM} = \frac{\sin. BMA}{\sin. DMB} = \frac{\sin. (BAM + ABM)}{\sin. DMB}.$$

On aurait de même :

$$\frac{pn}{nM} = \frac{\sin. BMA}{\sin. DMA}.$$

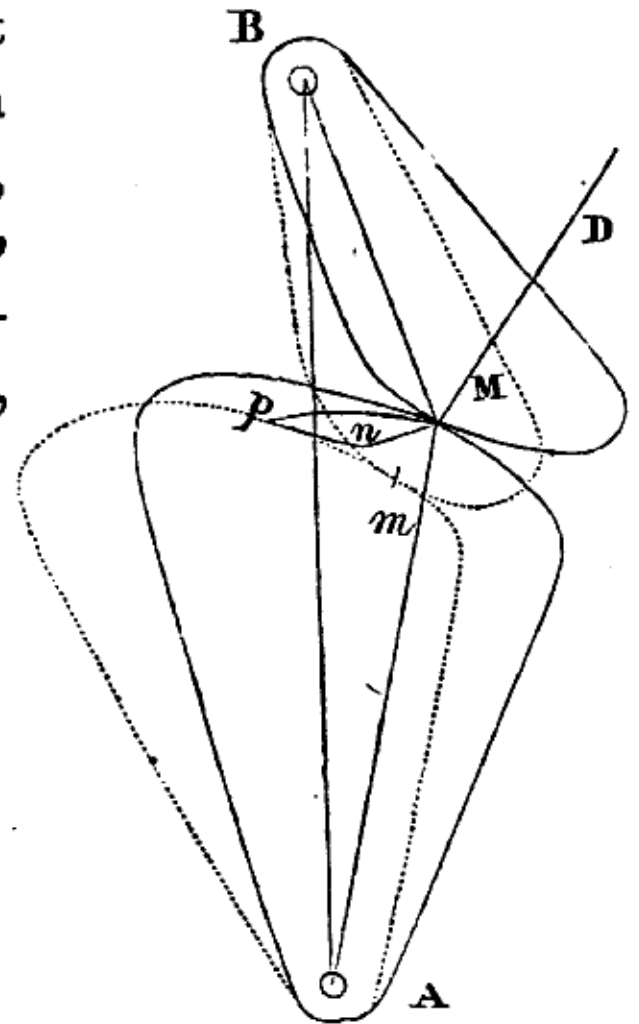


Fig. 128.

Ainsi, pour chacune des pièces, l'arc de glissement instantané (pn) est à l'arc parcouru par le point de contact, comme le sinus de la somme des angles compris entre la ligne des centres et les rayons de contact est au sinus de l'inclinaison de la normale en M , sur le rayon passant par le point de contact de l'autre pièce.

Tirant des expressions ci-dessus les deux valeurs de l'arc de glissement pn , on voit que cet arc ne peut devenir nul pendant le mouvement qu'à la condition d'avoir toujours :

$$\sin. BMA = \sin. (BAM + ABM) = 0.$$

Ainsi, les courbes ne peuvent se conduire par roulement et sans glisser l'une sur l'autre, qu'autant que les rayons vecteurs du point de contact coïncident avec la ligne des centres.

Par suite, deux circonférences se conduisant par simple contact, satisfont à cette condition, puisque le point de contact est toujours sur la ligne des centres, et elles peuvent seules se conduire sans glissement, et en produisant un rapport de vitesse constant, car alors, en effet, le point de rencontre de la normale commune avec la ligne des centres ne varie plus.

D'ailleurs, puisqu'il n'y a pas de glissements, que les chemins parcourus sont égaux, les vitesses angulaires instantanées sont inversement proportionnelles aux rayons vecteurs, qui, par suite, sont nécessairement constants comme le rapport des vitesses, les chemins égaux parcourus étant $R\omega = R'\omega'$, R et R' étant les rayons des circonférences, ω ω' les vitesses angulaires, la distance des centres $R + R'$ étant invariable.

DES MOUVEMENTS RELATIFS, LE RAPPORT DES VITESSES
ÉTANT CONSTANT.

152. Lorsque deux circonférences tangentes tournent autour de leurs centres de rotation qui sont les mêmes que les centres de ces circonférences, de manière qu'il ne se produise pas de glissement, par suite avec un rapport de vitesses constant, on aura toujours $R\omega = R'\omega'$, et tout se passe dans ce mouvement comme si l'une des circonférences roulait sur l'autre supposée immobile. Cette observation va permettre d'établir simplement les principes de la détermination des mouvements d'un point d'un des systèmes sur le plan de l'autre (car tout point d'un cercle dans son plan ne peut décrire que des circonférences de cercle), pour le cas principal, celui où les vitesses angulaires sont dans un rapport constant.

Montrons bien comment les deux mouvements de rotation peuvent être remplacés, au point de vue des tracés, par un simple roulement d'une circonférence sur une autre.

Soient O, O' deux cercles tangents, se conduisant sans glissement, m le point de contact. Soit ma une courbe assemblée au cercle O' qui prend la position $\mu' a'$ lorsque le point m est venu en μ' sur la circonférence O' et en m , sur la circonférence O . Soit M, A , une courbe adoptée au cercle O , tangente à $\mu' a'$ lors du mouvement simultané des deux cercles.

Faisons tourner toute la figure autour du centre O , de manière que le point m , revienne au m , ce qui annule la rotation propre au cercle O , puisque nous lui faisons faire une rotation

égale et opposée à la première. Le cercle O' viendra en O'' et le point μ' viendra en μ'' , et comme on avait $m\mu' = mm_1$, on aura $m''\mu'' = mm'' = mm_1$. Tout dans la figure O'' sera identique avec la figure O' . De là on doit conclure : *Que toutes les trajectoires décrites par des points du cercle O' dans le mouvement*

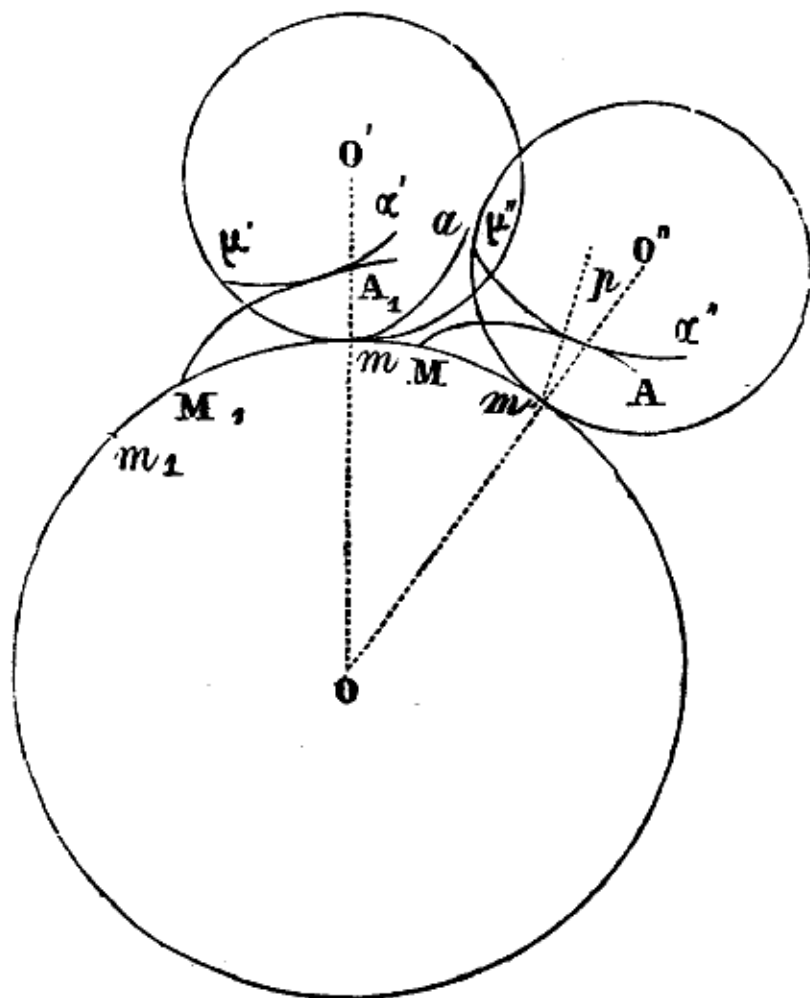


Fig. 129.

simultané sans glissement, des circonférences O et O' seront obtenues sur le plan de l'autre roue supposé fixe, en faisant rouler le cercle O' sur le cercle O rendu fixe.

Nous allons étudier les courbes ainsi engendrées qui se trouvent déterminées géométriquement d'une manière simple et générale, en commençant par celles engendrées par un point de la circonférence mobile.

153. *Courbe engendrée par un point dans la circonférence du cercle. — De l'épicycloïde. —* Deux cercles O et O' , situés dans le même plan (fig. 130), sont tangents l'un à l'autre en A . Le cercle O' est mobile, et partant de la position initiale, il roule sur le cercle O qui est fixe. Dans ce mouvement, le point a , confondu à l'origine avec A , mais appartenant au cercle O' ,

prendra des positions successives a, a_1, a_2 , etc., telles que les arcs $a_1 A_1, a_2 A_2$ seront égaux en longueur aux arcs AA_1, AA_2 , etc. Le lieu de toutes ces posi-

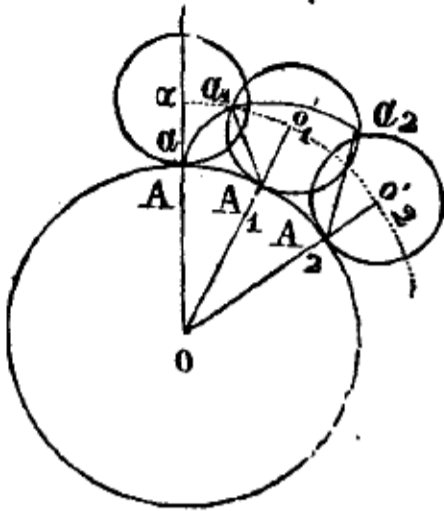


Fig. 130.

tions a, a_1, a_2 , etc., est une épicycloïde; tous les points de la circonférence mobile décrivent à la fois des épicycloïdes égales, ayant leur origine au point de contact des deux circonférences.

L'épicycloïde est extérieure ou intérieure, selon que le cercle mobile O' a son centre au dehors ou au dedans de la circonférence O qu'il touche en roulant.

Construction par points. — Pour construire par points une des courbes décrites par un point de la circonférence O' , celle dont l'origine est en A , par exemple, on prend sur un cercle de rayon $OO' = OA + O'A'$ des positions successives du centre O' lors du roulement, telles que O', O'_2 , etc. Si l'on porte sur une quelconque des circonférences ayant ces points pour centre, O'_2 par exemple, à partir du point de contact A_2 , un arc $A_2 a_2$, égal en développement à $A_2 A$, le point a_2 appartiendra à la courbe cherchée.

Normale à l'épicycloïde. — Le roulement du cercle O' , a lieu autour du point de contact A , comme centre instantané de rotation (art. 23); ce point appartient donc à la normale, qui est $a_1 A_1$.

Cette normale étant la corde du cercle mobile qui joint le point décrivant au point de contact des circonférences, la tangente à l'épicycloïde sera la corde joignant le point décrivant et le point du cercle diamétralement opposé au point de contact, formant un angle droit avec la normale (angle sur la circonférence mesuré par une demi-circonférence).

Un roulement d'une petite circonférence à l'intérieur d'une plus grande, engendre de même, par un point de la petite circonférence, une épicycloïde intérieure, une hypocycloïde. Le

