NOTES.

PREMIÈRE PARTIE.

Applications de la cinématique à la géométrie.

Le présent ouvrage paraît être surtout une application de la géométrie à la mécanique, car, en effet, la théorie des mécanismes est intimement liée aux propriétés géométriques des lignes qui représentent les mouvements. Mais l'inverse doit être également vrai, et puisque la mécanique est une science rationnelle, ayant le même degré de certitude, la même valeur logique que la géométrie, il doit y avoir aussi une application de la cinématique à la géométrie, on doit trouver entre ces deux sciences des relations analogues aux relations mutuelles de la géométrie et de l'algèbre.

L'introduction de la notion du mouvement dans la géométrie moderne est, en effet, de chaque instant, et on peut dire que c'est l'élément capital qui la fait différente de la science d'Euclide et d'Archimède. La notion de continuité, qui repose évidemment sur celle du mouvement, doit être citée en premier lieu; les théories des roulettes, des centres instantanés de rotation exposées précédemment, ne sont que de la cinématique pure.

Sans entrer dans de plus grands détails sur ce point, un peu étranger en réalité au présent ouvrage, je me contenterai de rappeler ici quelques théorèmes ou du premier ordre ou curieux par leur nouveauté, qui suffiront amplement pour mettre hors de doute un principe qu'il me semble intéressant d'établir d'une manière incontestable.

Note première.

THÉORÈME DE GULDIN.

SURFACES ET VOLUMES DES CORPS DE RÉVOLUTION.

894. Nous rappellerons en premier lieu un des plus beaux théorèmes de la géométrie essentiellement fondé sur des considérations de cinéma-

tique, le célèbre théorème de Guldin sur l'aire et le volume des solides de révolution. Ce théorème frappe toujours vivement, et à juste titre, l'esprit des jeunes gens lorsqu'ils rencontrent pour la première fois une proposition de géométrie aussi générale en étudiant les premiers éléments de la mécanique.

Soit une courbe plane quelconque ABC (fig. 780), qui tourne autour

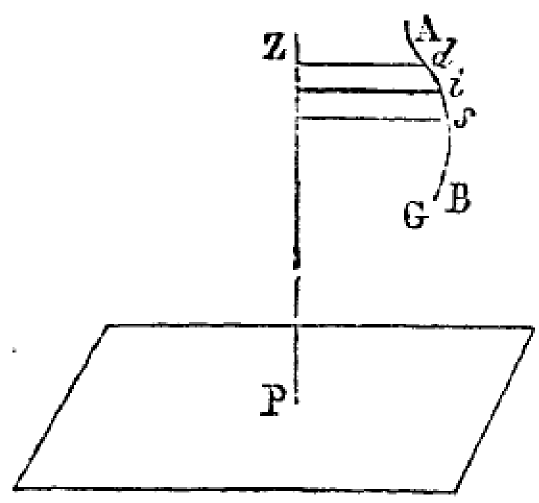

Fig. 780.

d'un axe PZ situé dans son plan, de manière que tous les points de la courbe demeurent toujours aux mêmes distances de cet axe : cette courbe engendre une surface que l'on nomme *surface de révolution.*

Pour en déterminer l'aire, on peut remarquer que chaque élément de la courbe génératrice produit une surface de cône tronqué dont l'aire est égale au côté ds multiplié par la circonférence du cercle que décrit son milieu, ou son centre de gravité i, autour de l'axe PZ.

Donc, si l'on suppose tous ces éléments égaux, la surface entière sera égale à leur somme multipliée par la circonférence moyenne entre celles que décrivent tous leurs centres de gravité.

Mais cette moyenne circonférence a pour rayon la moyenne distance de tous ces points à l'axe de révolution, ou bien la distance du centre de gravité de la courbe au même axe ; donc on peut dire :

Que l'aire d'une surface de révolution est égale à la longueur de la génératrice multipliée par la circonférence que décrit son centre de gravité autour de l'axe de révolution.

On voit de la même manière que si plusieurs courbes situées dans le même plan tournent autour d'un axe situé dans ce plan, la somme des surfaces engendrées est égale à la somme des génératrices, multipliée par la circonférence que décrit le centre de gravité de leur système.

Mais il faut observer que, lorsque la génératrice ou les génératrices ne sont pas situées en entier d'un même côté de l'axe, l'expression précédente ne donne plus que la somme des aires engendrées par les parties qui sont d'un côté de cet axe, moins la somme des aires engendrées par les parties qui sont de l'autre côté.

895. On peut appliquer aussi la théorie des centres de gravité à la cubature des solides de révolution. Et il n'est pas difficile de voir que *le volume d'un solide de révolution est égal à l'aire de la section génératrice multipliée par la circonférence que décrit son centre de gravité autour de l'axe fixe.*

En effet, si l'on considère un rectangle $bcde$ (fig. 784), qui tourne

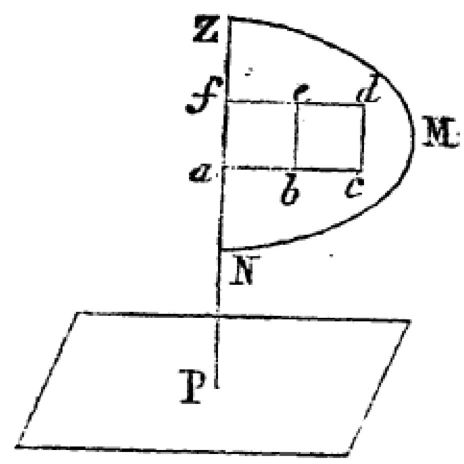

Fig. 781.

autour de l'axe PZ parallèle à l'un de ses côtés be, il est clair que le solide engendré par ce rectangle est égal à la différence de deux cylindres de même hauteur cd, et dont l'un a pour rayon la distance ca, du côté cd à l'axe fixe; et l'autre, la distance ba, du côté be au même axe. Ce solide est donc exprimé par $(\pi\,\overline{ac}^2 - \pi\,\overline{ab}^2)\,cd$, en nommant π le rapport de la circonférence au diamètre. Si l'on met $ca-cb$, à la place de ab, l'expression précédente devient

$$\pi\,(2ac\times bc-\overline{bc}^2)\,cd,\ \text{ou}\ bc\times cd\times 2\pi\left(ac-\frac{bc}{2}\right);$$

c'est-à-dire égale au rectangle $bcde$, multiplié par la circonférence décrite d'un rayon moyen entre les rayons ca et ba, ou bien égal à la distance du centre de gravité du parallélogramme à l'axe de révolution.

Donc, si l'on conçoit la section génératrice ZMN comme partagée en une infinité de petits rectangles égaux, on pourra dire que le solide total engendré est égal à la somme de tous ces rectangles, ou à l'aire de la section ZMN, multipliée par la circonférence moyenne entre toutes celles que décrivent leurs centres de gravité autour de l'axe. Mais cette moyenne circonférence a pour rayon la moyenne distance de tous ces points au même axe, ou la distance du centre de gravité à cet axe; donc, etc.

On pourrait voir encore, par un raisonnement à peu près semblable au précédent, que, si une surface plane terminée par une courbe quelconque se meut dans l'espace, de manière que son plan soit toujours (au même point) perpendiculaire à une courbe quelconque à double courbure, le solide engendré est égal à l'aire de la surface génératrice multipliée par la longueur de la courbe que parcourt son centre de gravité.

Mais nous ne nous arrêterons pas à démontrer cette proposition que l'on pourrait déduire, aussi bien que les précédentes, des formules connues pour les centres de gravité. Nous ne ferons même aucune application particulière de cette théorie aux surfaces et aux solides dont on a immédiatement la mesure en géométrie. Notre seul but, dit M. Poinsot, auquel nous empruntons ce passage de son excellent *Traité de statique* pour montrer comment cet esprit si éminent arrive au même ordre d'idées que nous poursuivons ici, était de montrer ce rapprochement remarquable de considérations qui paraissent d'abord étrangères entre elles, mais qui s'enchaînent comme toutes les questions soumises aux mathématiques, et se fondent, pour ainsi dire, les unes dans les autres, lorsqu'on écarte un instant les noms que l'objet particulier de chaque question nous rappelle.

Note deuxième.

MÉTHODE DE ROBERVAL POUR TRACER LES TANGENTES AUX COURBES.

896. Le principe de la composition des vitesses qui permet d'obtenir une vitesse résultante en grandeur et en direction à l'aide des vitesses composantes, fournit le moyen d'obtenir la tangente aux trajectoires, et par suite aux courbes qu'elles constituent. Cette méthode est applicable lorsque la loi du mouvement d'un point est connue suivant deux directions ; elle est due à Roberval, et repose entièrement sur des considérations de cinématique. Nous donnerons quelques exemples de son emploi.

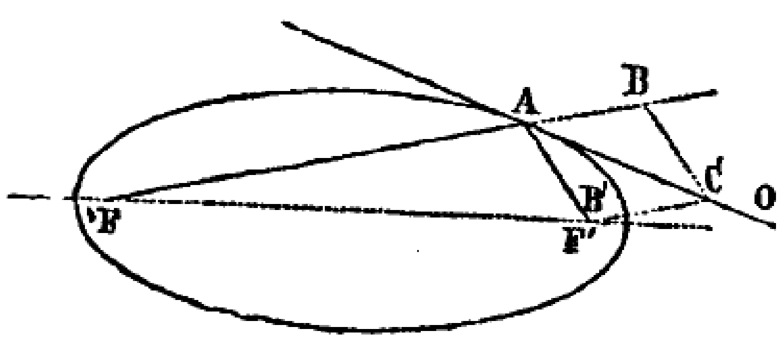

Fig. 782.

897. *Tangente à l'ellipse.* — L'ellipse s'engendre en fixant aux deux foyers un fil de longueur constante FAF'. Puisque dans les mouve-

ments du point descripteur, la longueur du fil FA + F′A est toujours la même, il est évident que la portion FA s'allonge de la même quantité que celle dont se raccourcit l'autre portion correspondante F′A. La vitesse de glissement suivant FA est donc exactement égale et de sens contraire de celle suivant F′A, chacune fait décrire deux chemins simultanés égaux sur les rayons vecteurs FA et F′A, et par la proposition du parallélogramme des chemins ou des vitesses, on aura facilement la direction de la vitesse de glissement résultante, qui a lieu suivant la tangente. Ainsi, en prenant sur le prolongement de FA une partie quelconque AB, et sur F′A une partie AB′ = AB, construisons le parallélogramme ABCB′; la diagonale AC sera la tangente à l'ellipse en A.

898. *Tangente à la conchoïde.* — Le point S par lequel passe constam-

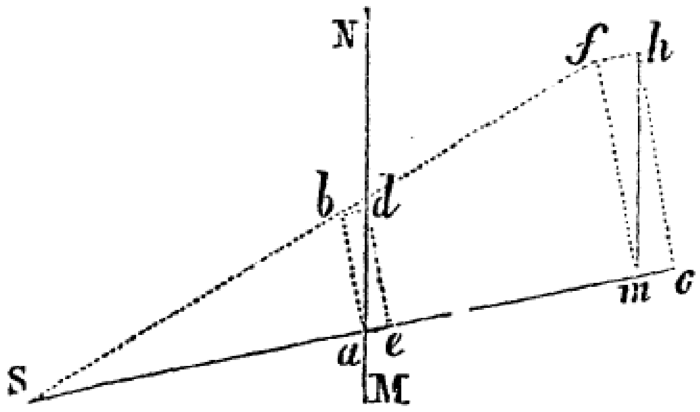

Fig. 783.

ment la droite qui porte le point qui trace la conchoïde, peut être considéré comme un pôle autour duquel tourne le rayon recteur S*am*, et les vitesses des points *a* et *m* résultent d'une rotation et d'un glissement simultanés. Les vitesses de glissement des deux points sont égales puisque leur distance ne varie pas, et les vitesses de rotation sont proportionnelles aux distances S*a*, S*m*.

La vitesse absolue de *a* est dirigée suivant la directrice MN. Soit *ad* cette vitesse; en construisant le parallélogramme *abde*, *ab* perpendiculaire à S*a* sera la vitesse de rotation, *bd* égale et parallèle à la direction *ae* la vitesse de glissement. Si nous traçons *mf*, perpendiculaire sur S*m* jusqu'à la rencontre de la ligne S*b* prolongée, *mf* sera la vitesse de circulation et *ae* celle de glissement pour le point *m*. Prenant sur une parallèle à S*afh* = *ae*, *mh* sera la vitesse réelle en grandeur et en direction, et par suite sera la tangente à la conchoïde au point *m*.

899. *Tangente à la spirale d'Archimède.* — La spirale d'Archimède étant engendrée par la combinaison du mouvement de glissement d'un point décrivant sur un rayon vecteur, dans un rapport constant avec la vitesse de rotation de ce rayon, la construction de la vitesse résultante et par suite de la tangente, se déduit directement de la règle du parallélogramme des vitesses. $\rho = a\omega$ étant l'équation de la spirale, pour mener la tangente en un point M, élevez en ce point une perpendicu-

56

laire au rayon vecteur r, prenez une longueur MO égale à $2\pi r$; perpendiculairement à cette ligne menez une ligne à angle droit OT égale à $2a\pi$, joignez le point T au point M, et vous aurez la tangente cherchée. En effet, la vitesse de rotation, si elle restait ce qu'elle est au point M serait pour une circonférence $2\pi r$; le glissement est bien, pour

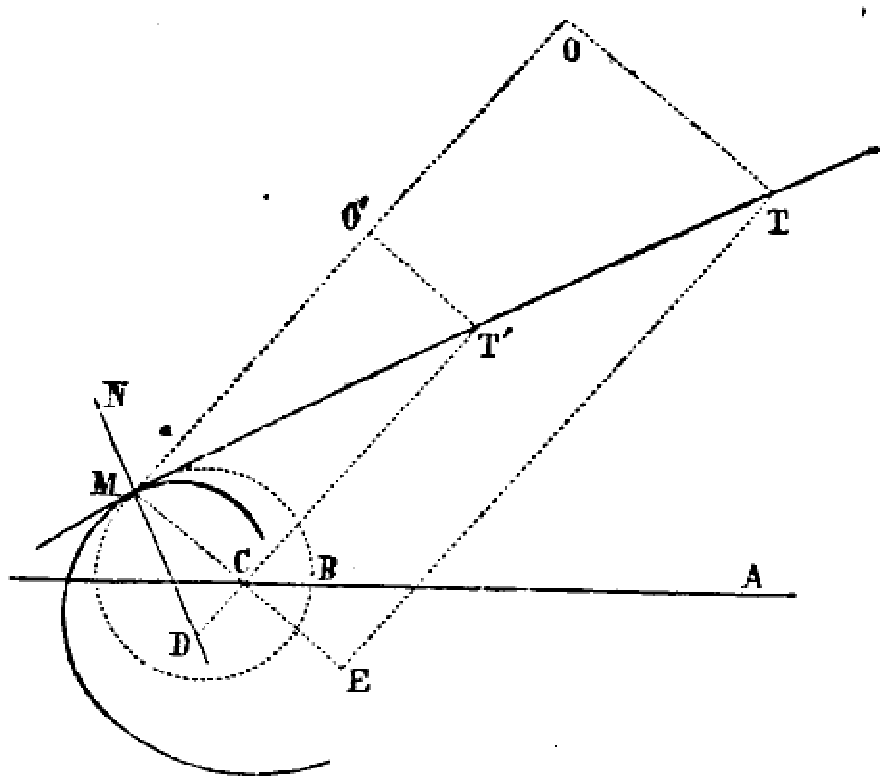

Fig. 784.

cette rotation, $a\omega = 2a\pi$; donc, MT est bien la résultante dont la direction ne change pas pour des valeurs quelconques de ω.

Note troisième.

TRACÉ DES NORMALES A L'AIDE DES CENTRES INSTANTANÉS DE ROTATION.

900. Le principe fondamental de la théorie des centres instantanés appartient évidemment à la cinématique pure, et M. Tom Richard en a donné une démonstration analytique très-satisfaisante, en partant de la notion des vitesses, dans la brochure à laquelle nous avons emprunté le théorème de l'art. 144.

Les centres instantanés de rotation peuvent servir dans plusieurs cas à déterminer la normale en un point donné, et par suite la tangente en ce point.

En effet, on sait que la normale en un point passe toujours par le centre instantané de rotation. Lors donc qu'une courbe est décrite par un point d'une courbe roulant sur une ligne donnée ou assujettie à se mouvoir sur deux directrices, le centre instantané de rotation étant facilement déterminé au moyen des normales aux deux directrices, on aura immédiatement la normale en un point de la courbe en joignant celui-ci au centre de courbure, et par suite la tangente en ce point.